

TESIS DOCTORAL

Análisis y modelización del proceso de fractura dúctil en materiales plásticos y viscoplásticos

Autor: Javier Reboul Corpa

Directora: Guadalupe Vadillo Martín

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Universidad Carlos III de Madrid

Leganés, septiembre de 2018

TESIS DOCTORAL

**Análisis y modelización del proceso de
fractura dúctil en materiales plásticos y
viscoplásticos**

Autor: Javier Reboul Corpa

Directora: Guadalupe Vadillo Martín

Firma del Tribunal Calificador:

Nombre y Apellidos

Firma

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés, de de 2018.

*A mi mejor amiga,
mi compañera de viaje.*

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría mostrar mi más profundo agradecimiento a Guadalupe Vadillo Martín por su inestimable dedicación y entusiasmo a lo largo de estos años. Tu positivismo y tu implicación han sido esenciales en el desarrollo de esta tesis doctoral.

A los miembros del grupo de investigación *Nonlinear Solid Mechanics*, en especial a José A. Rodríguez Martínez. La energía y motivación con la que desempeñas tus labores de investigación y docencia cada día son un gran ejemplo para todos.

Al Profesor D. Rittel y al Profesor S. Osovski del Technion - Israel Institute of Technology por su contribución en esta investigación y por darme la oportunidad de viajar a Israel a realizar una estancia en sus instalaciones.

Al Profesor A. Srivastava de la Texas A&M University por su gran aportación en el desarrollo de la última parte de esta tesis doctoral.

Al departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, por permitirme vivir esta experiencia docente e investigadora durante estos años. En especial, quería agradecer a mis tutores del TFG, Jesús Pernas Sánchez y José Artero Guerrero, por iniciarme en el mundo de la investigación y ayudarme a entrar en el departamento, y a José Fernández Sáez por sus aportaciones de gran valor conceptual realizadas a lo largo de esta tesis.

A mis compañeros (y amigos) que me han acompañado durante estos años en la universidad: Mahy, Damián, Ángel, Vila, Lorena, Pablo, Dani, Sara, Mata, Álvaro, Elisa, Ascen, Luis... Gracias por hacer que estos años hayan sido inolvidables.

A Félix, mi profesor de Tecnología en el I.E.S. Griñón, por despertar mi interés por el mundo de la ingeniería y por conseguir que no me conformara en la vida.

A mi familia y amigos, por haber estado siempre a mi lado y haberme mostrado vuestro cariño.

Y por último, mi mayor agradecimiento es para ti, Noe. Tú más que nadie sabes lo duro que ha sido para mí realizar esta tesis doctoral. Sin tu apoyo todo esto no hubiera sido posible. Gracias por querer compartir este viaje conmigo (y todos los que nos quedan).

La fractura dúctil es el principal mecanismo de fallo en aleaciones metálicas utilizadas en ingeniería y es primordial en los estudios de integridad estructural, junto con la corrosión y la fatiga. Debido a ello, la importancia de este modo de fallo ha provocado que ciertos procesos de ingeniería requieran en una mayor medida del conocimiento de los fenómenos de deformación y fractura de materiales dúctiles.

Esta tesis doctoral se centra en el análisis y la modelización del proceso de fractura dúctil debido a la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, con el fin de estudiar algunos de los factores que afectan a estos procesos y de mejorar los modelos constitutivos que describen estos fenómenos, teniendo en cuenta a su vez la influencia de la deformación plástica y la velocidad de deformación plástica en el material.

En primer lugar, se propone un modelo constitutivo para materiales dúctiles viscoplásticos con huecos cilíndricos en su interior, donde se desarrollan funciones de plastificación analíticas que tienen en cuenta el proceso de crecimiento de microvacíos. Los resultados de esta línea de investigación se comparan con otros modelos de materiales porosos con dependencia de la velocidad de deformación.

Por otro lado, se desarrolla una extensión del modelo Gurson-Tvergaard, para materiales sin dependencia con la velocidad de deformación, que añade el efecto de la triaxialidad y del parámetro de Lode a través de los parámetros de ajuste del modelo, utilizando simulaciones numéricas de modelos de celda unitaria tridimensionales con huecos esféricos para su implementación y posterior validación.

Finalmente, se realiza un estudio sobre la interacción que se produce entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales viscoplásticos, dependiendo del estado tensional aplicado y del ángulo de orientación de la banda de localización, mediante el estudio de simulaciones numéricas en modelos de celda unitaria tridimensionales con huecos esféricos.

Abstract

Ductile fracture is the main failure mechanism in metal alloys used in engineering and is essential in studies of structural integrity, along with corrosion and fatigue. Due to this, the importance of this failure mechanism has caused that certain engineering processes require a deeper knowledge of the deformation and fracture phenomena in ductile materials.

This doctoral thesis focuses on the analysis and modeling of ductile fracture process as a consequence of nucleation, growth and coalescence of microvoids in the material, in order to study some of the factors that affect these processes and to improve the constitutive models that describe these phenomena; taking into account the influence of plastic strain and plastic strain rate in the material.

First of all, a constitutive model for viscoplastic ductile materials with cylindrical voids inside is proposed, where analytical macroscopic functions that take into account the growth process of microvoids are developed. The results of this research are compared with other porous materials models with dependence on strain rate.

On the other hand, an extension of the Gurson-Tvergaard model for materials without dependence on strain rate is developed, which adds the effect of triaxiality and Lode parameter through the parameters of the model, using numerical simulations of three-dimensional unit cell models with spherical voids for its implementation and subsequent validation.

Finally, an analysis of the interplay that takes place between the macroscopic localization and coalescence of microvoids in viscoplastic materials is carried out, depending on the applied stress state and the orientation angle of the location band, by means of the study of numerical simulations of three-dimensional unit cell models with spherical voids.

Índice

Índice de Figuras	xv
Índice de Tablas	xxi
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Estructura del documento	4
1.4 Contribuciones originales	4
2 Principios fundamentales de la Mecánica de Sólidos	7
2.1 Cinemática en grandes deformaciones	7
2.2 Descripción de la deformación	8
2.3 Concepto de tensión	12
2.4 Ecuaciones de balance	13
2.5 Principio de objetividad	14
3 Modelos de fractura dúctil	17
3.1 Fractura dúctil	17
3.2 Modelización micromecánica	18
3.3 Modelos constitutivos	23
3.4 Modelos computacionales de celda unitaria	26
4 Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación	29
4.1 Introducción	29
4.2 Celda unitaria cilíndrica con hueco cilíndrico	30
4.3 Formulación de la función de plastificación	31
4.4 Aproximación analítica de la función de plastificación	45
4.5 Validación de las funciones de plastificación	51

4.6	Resumen y conclusiones	60
5	Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades	63
5.1	Introducción	63
5.2	Celda unitaria tridimensional cúbica con hueco esférico	64
5.3	Modelo Gurson-Tvergaard modificado con dependencia del parámetro de Lode	73
5.4	Implementación numérica del modelo	79
5.5	Análisis numérico de celdas tridimensionales con material GT dependiente del parámetro de Lode	85
5.6	Resumen y conclusiones	90
6	Interacción entre la localización macroscópica y la coalescencia de huecos en materiales viscoplásticos	93
6.1	Introducción	93
6.2	Celda unitaria hexaédrica con hueco esférico	94
6.3	Formulación del modelo de celda unitaria	97
6.4	Análisis de resultados	101
6.5	Resumen y conclusiones	114
7	Conclusiones y trabajos futuros	117
7.1	Conclusiones	117
7.2	Trabajos futuros	119
7.3	Lista de publicaciones	119
	Bibliografía	121
	Anexo A Demostración de la relación $\dot{E}_{eq} = \dot{\bar{\epsilon}}$ con porosidad igual a cero	131
	Anexo B Operador tangente consistente para un modelo GT dependiente del parámetro de Lode: ecuaciones complementarias	133

Índice de Figuras

1.1	Tipos de probeta empleados comúnmente en ensayos de fractura dúctil, con los correspondientes valores de triaxialidad alcanzados (Benzerga y Leblond, 2010)	2
2.1	Configuraciones de referencia y actual en un sólido deformable, adaptado de Holzapfel (2000)	8
2.2	Deformación de un elemento de línea en descripción material, adaptado de Holzapfel (2000)	10
2.3	Vectores de tensión actuando en un elemento infinitesimal de superficie, adaptado de Holzapfel (2000)	12
3.1	Propagación de una fractura dúctil por crecimiento y coalescencia de huecos en un acero inicialmente homogéneo (Benzerga y Leblond, 2010) .	18
3.2	Micromecanismos de fractura dúctil. (a) Rotura de partículas, formación de grietas con forma de moneda y coalescencia de huecos un compuesto con matriz metálica (matriz dura) (Babout et al., 2004). (b) Decohesión y crecimiento de huecos hasta la coalescencia en un compuesto con matriz metálica (matriz blanda) (Babout et al., 2004). (c) Crecimiento de huecos y coalescencia en un acero C-Mn (Benzerga, 2000)	19
3.3	Modelo de celda unitaria axisimétrico representando una microestructura periódica con huecos esféricos (Benzerga y Leblond, 2010)	27
4.1	Modelo de celda cilíndrico con hueco	31
4.2	Representación 2D de la sección longitudinal del cilindro con hueco, con detalle de las direcciones utilizadas para las tensiones y velocidades de deformación macroscópicas	32
4.3	Representación de las superficies de plastificación para huecos cilíndricos con $m=0$, para diferentes valores de la porosidad f	38
4.4	Representación de las superficies de plastificación para huecos cilíndricos con $m=1$, para diferentes valores de la porosidad f , incluyendo los valores límite correspondientes a $f = 0$ y $f = 1$	42

4.5	Representación de las superficies de plastificación exactas para huecos cilíndricos (obtenidas mediante cálculo numérico), para diferentes valores de la porosidad f y del exponente m	44
4.6	Variación de $G(m)$ y $G(0)$ frente a α para un valor del exponente de endurecimiento $m = 0.1$ y valores de porosidad $f = 0.01$ y $f = 0.1$	46
4.7	Variación de $H(m)$ y $H(0)$ frente a α para un valor del exponente de endurecimiento $m = 0.1$ y valores de porosidad $f = 0.01$ y $f = 0.1$	46
4.8	Evolución de la función $G'(0)$ frente a α para $f=0, 0.05, 0.1$ y 0.3	48
4.9	Comparación de $G'(0)$ para $f=0$ y $G'_{0 \text{ Fitted}}$ frente a α	49
4.10	Comparación de la curva $f\alpha H(0)$ y los ajustes lineales realizados frente a α , para $f = 0.01$ con $B = 0.008$ y $f = 0.1$ con $B = 0.052$	50
4.11	Ajuste polinómico de segundo grado para la función $B(f)$	50
4.12	Comparación de los modelos propuestos con la relación exacta $\hat{\Sigma}_1\text{-}\hat{\Sigma}_{eq}$, teniendo en cuenta la primera aproximación en (a), (c) y (e), y la segunda aproximación en (b), (d) y (f), para diferentes valores de f y m	53
4.13	Malla inicial del cilindro (a) y condiciones de contorno de desplazamiento impuestas en la celda unitaria (b)	55
4.14	Comparación de los modelos propuestos, el modelo de elementos finitos y la relación exacta $\hat{\Sigma}_1\text{-}\hat{\Sigma}_{eq}$, teniendo en cuenta la primera aproximación en (a), (c) y (e), y la segunda aproximación en (b), (d) y (f), para diferentes valores de f y m	58
4.15	Comparación de la segunda superficie de plastificación propuesta, el modelo LPS (Leblond et al., 1994b) y la relación exacta $\hat{\Sigma}_1\text{-}\hat{\Sigma}_{eq}$, para diferentes valores de f y m	60
5.1	Geometría inicial y condiciones de contorno impuestas en la celda con y sin hueco	65
5.2	Mallado de una celda unitaria cúbica con un hueco esférico en su interior, para una porosidad $f_0 = 0.005$	70
5.3	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente, para $f_0 = 0.005$ y $T = 1$	71
5.4	Evolución del tamaño relativo del ligamento de la celda con hueco en direcciones 1, 2 y 3, para $f_0 = 0.005$, $L = 0$ y $T = 1, 2$. Se refleja el momento en el que se produce la localización o coalescencia mediante círculos	72
5.5	Variación de forma del hueco durante la expansión dependiendo del parámetro de Lode para $E_{eq} = 0.5$ y $T = 0.8$ y para $E_{eq} = 0.1$ y $T = 2$, con una porosidad inicial $f_0 = 0.005$	72
5.6	Representación del ajuste realizado para las curvas $f\text{-}E_{eq}$ y $\Sigma_{eq}\text{-}E_{eq}$, con las funciones de error introducidas, $ F^I - F^{II} $ y $ W^I - W^{II} $	74

5.7	Ejemplo del proceso de calibración de los parámetros q_1 y q_2 para $f_0 = 0.005$, $T = 1$ y $L = -1$	75
5.8	Comparación de las curvas Σ_{eq} - E_{eq} y f - E_{eq} para una celda con hueco y una celda continua GT con diferentes parámetros q_i calibrados, para $T = 1, 2$, $f_0 = 0.005$ y $L = -1, 0, 1$	76
5.9	Relación existente entre Ω y el parámetro de Lode	77
5.10	Representación de la función de plastificación del modelo GT modificado en los planos $\Sigma_h/\bar{\sigma}$ - $\Sigma_{eq}/\bar{\sigma}$ y en el plano desviador para $k_\Omega = 0$ y $k_\Omega = 0.04$ y $f_0 = 0.005$	78
5.11	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 1$ y $L = 0$	86
5.12	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 1$ y $L = 1$	87
5.13	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 2$ y $L = 0$	88
5.14	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 2$ y $L = 1$	89
5.15	Variación cuadrática propuesta para T y L	89
5.16	Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.05$, con los valores variables de T y L	90
6.1	Vista general de un material poroso que contiene una banda delgada con una distribución periódica de microvacíos, orientada con un ángulo inicial ψ_u . El modelo se representa mediante celdas unitarias que contienen un único hueco esférico en el centro y dos bloques semi infinitos libres de huecos fuera de la zona de la banda	95
6.2	Esquema de un cuarto del volumen representativo utilizado en las simulaciones, con una orientación inicial de la banda ψ_u y una longitud característica D_0 . A su vez, se representa un mallado de elementos finitos del modelo correspondiente a una porosidad inicial $f_0 = 0.001$ y un angulo inicial $\psi_u = 39^\circ$	96
6.3	Mallado de la celda unitaria para $f_0 = 0.001$ y $\psi_u = 0^\circ$	97

6.4	Comparativa de los resultados obtenidos con la nueva metodología propuesta en este trabajo frente al modelo presentado por Tekoğlu et al. (2015) para un material dependiente únicamente de la deformación, donde se representa la tensión macroscópica en dirección longitudinal adimensionalizada Σ_1/σ_0 frente a la deformación equivalente macroscópica en la celda completa E_{eq} para diferentes triaxialidades (a). A su vez se representa Σ_1/σ_0 frente a la deformación longitudinal macroscópica en la banda para $T = 3$ (b). La porosidad inicial es $f = 0.001$, el parámetro de Lode $L = -1$, el exponente de endurecimiento $N = 0.1$ y el ángulo de orientación inicial de la banda $\psi_u = 0^\circ$	102
6.5	Representación de los criterios de localización y coalescencia, donde se enfrenta la deformación macroscópica equivalente E_{eq} y el radio del hueco a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b para $T = 0.75$ y $T = 2$, $m = 0$ y $\psi_u = 39^\circ$. El comienzo de la localización y la coalescencia se simbolizan mediante las líneas verticales discontinuas	103
6.6	Modelo de elementos finitos con los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para $m = 0$ y $\psi_u = 39^\circ$ al comienzo de la localización y coalescencia en el caso de $T = 0.75$ (a) y $T = 2$ (b,c)	104
6.7	Representación de los criterios de localización y coalescencia, donde se enfrenta la deformación macroscópica equivalente E_{eq} y el radio del hueco a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b para $T = 0.75$ y $T = 2$, $m = 0.1$ y $\psi_u = 39^\circ$. El comienzo de la localización y la coalescencia se simbolizan mediante las líneas verticales discontinuas . . .	105
6.8	Modelo de elementos finitos con los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para $m = 0.1$ y $\psi_u = 39^\circ$ al comienzo de la localización y coalescencia en el caso de $T = 0.75$ (a) y $T = 2$ (b,c)	106
6.9	Evolución del ratio de porosidad f/f_0 frente a la deformación macroscópica equivalente E_{eq} para $T = 0.75$ y $T = 2.5$, para $m = 0$, $m = 0.05$ y $m = 0.1$ y para $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$. Los cruces simbolizan el comienzo de la localización y los círculos, la coalescencia. Para todos los casos se toma $L = -1$ y $f_0 = 0.001$	107
6.10	Valores de f_c/f_0 al comienzo de la localización y coalescencia como una función de m para $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$, y para diferentes valores de triaxialidad	108
6.11	Deformación macroscópica equivalente crítica en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y la coalescencia frente a la triaxialidad T , para $m = 0$ (a,c,e) y $m = 0.1$ (b,d,f) y para $\psi_u = 0^\circ$ (a,b), $\psi_u = 20^\circ$ (c,d) y $\psi_u = 39^\circ$ (e,f). Se utiliza una escala logarítmica en base 10 en el eje y	110

6.12	Valores críticos de la deformación equivalente en la celda completa E_{eq}^c al comienzo de la localización y coalescencia frente al exponente de endurecimiento m para $L = -1$, $f_0 = 0.001$ y diferentes valores de T y ψ_u	111
6.13	Valores críticos de la deformación equivalente en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia frente al exponente de endurecimiento m para $L = -1$, $f_0 = 0.001$ y diferentes valores de T y ψ_u	112
6.14	Deformación equivalente crítica normalizada en la banda \hat{E}_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia frente a la triaxialidad T , para $m = 0.05$ y $m = 0.25$, y para $\psi_u = 0^\circ$, $\psi_u = 20^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$	113
6.15	Ratio entre las deformaciones equivalentes críticas de coalescencia y localización en la banda E_{eq}^{cb} , frente al exponente de endurecimiento m (a,b) y frente a la triaxialidad (c,d) para diferentes valores de T , m y ψ_u	114

Índice de Tablas

4.1	Valores óptimos de B para cada porosidad	49
5.1	Propiedades del acero de alta resistencia Weldox 960	69
5.2	Valores óptimos de q_1 , q_2 y E_c para $L = -1$, $T = 1, 2$, $f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$	75
5.3	Coeficientes de interpolación de la función $q_i(T)$ para $f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$	75

1

Introducción

En esta tesis doctoral se realiza un estudio de los mecanismos que provocan el proceso de fractura dúctil y se trata de introducir novedades en su modelización constitutiva. En concreto, en este trabajo se aborda de una manera analítica y numérica el fenómeno de nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, considerando diferentes estados de carga y con materiales plásticos y viscoplásticos.

1.1 Motivación

La fractura dúctil es el principal mecanismo de fallo en aleaciones metálicas utilizadas en ingeniería. Una de las principales razones es que las propiedades de las aleaciones metálicas empleadas en elementos estructurales son mejoradas de manera continua con el fin de evitar el fallo frágil y otras formas de fractura intergranular, por lo que la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos se convierte en el mecanismo dominante de fallo. Esto implica que el estudio del proceso de fractura dúctil sea primordial en la evaluación de la integridad en estructuras metálicas, junto con la fatiga y la corrosión (Tekoğlu et al., 2015).

Debido a ello, la importancia de este mecanismo de fallo ha provocado que ciertos procesos de ingeniería requieran en una mayor medida del conocimiento de los fenómenos de deformación y fractura de materiales dúctiles, en condiciones estáticas y dinámicas. Por ejemplo, el estudio de la fractura dúctil es determinante en los análisis de los procesos de conformado y corte de metales, donde las grandes deformaciones plásticas alcanzadas en procesos como el forjado, extrusión o embutido, pueden producir grietas de diferentes características (Bäker et al., 2002; Molinari et al., 2002; Rojek et al., 2001; Thomason, 1990). También se ven afectados otros procesos, como pueden ser los análisis del comportamiento frente a choque de estructuras en vehículos ligeros (Reyes et al., 2002) o los análisis de propagación de fisuras en paneles de espesor reducido (Chabanet et al., 2003).

Por otra parte, el análisis de los mecanismos de fallo dúctil es importante en el proceso de caracterización de materiales mediante ensayos de fractura (Figura 1.1). El efecto de la triaxialidad del estado tensional en la deformación de fractura de metales es muy significativo y ha sido ampliamente documentado (Garrison Jr y Moody, 1987), siendo menor la deformación de fractura a medida que aumenta el valor de la triaxialidad. Por ejemplo, los ensayos de tracción uniaxial realizados en barras con un redondeo suave comienzan con un valor de triaxialidad igual a un tercio, que va aumentando debido a la generación del cuello de estricción.

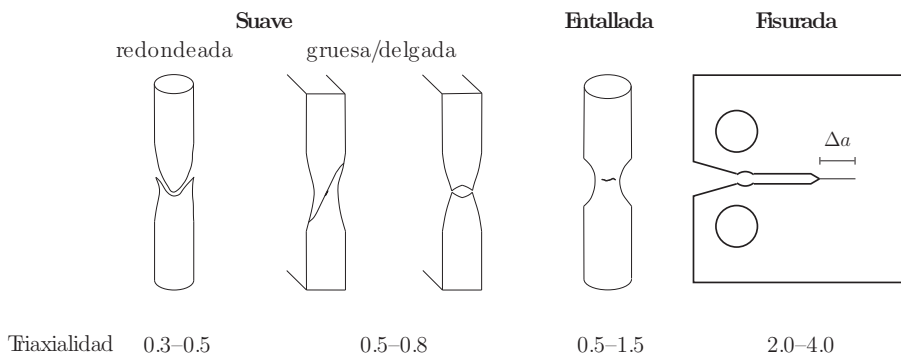


Fig. 1.1 Tipos de probeta empleados comúnmente en ensayos de fractura dúctil, con los correspondientes valores de triaxialidad alcanzados (Benzerga y Leblond, 2010)

El fenómeno de fractura dúctil ha sido estudiado en profundidad en las últimas décadas, comenzando por el trabajo observacional de Rogers (1960) y los primeros modelos analíticos que tuvieron en cuenta la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos en el interior del material, propuestos por McClintock (1968) y Rice y Tracey (1969). No obstante, uno de los modelos más reconocidos es el introducido originalmente por Gurson et al. (1977), donde se proponen funciones de plastificación macroscópicas para materiales dúctiles porosos, y que es válido exclusivamente para un comportamiento del material rígido perfectamente plástico.

A lo largo de los años se han desarrollado diversas extensiones de estos modelos con el objetivo de mejorar la predicción de la respuesta en metales dúctiles: nucleación y coalescencia (Chu y Needleman, 1980; Tvergaard y Needleman, 1984), efecto de la forma del hueco (Gologanu et al., 1993, 1994; Madou y Leblond, 2012a,b; Pardo y Hutchinson, 2000), endurecimiento por deformación (Leblond et al., 1995), anisotropía plástica del material de la matriz (Benzerga et al., 2004; Cazacu y Stewart, 2009; Stewart y Cazacu, 2011), influencia del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras en la plastificación de materiales porosos (Benallal et al., 2014), etc. Cabe destacar el modelo llamado Gurson-Tvergaard (Tvergaard, 1981, 1982) donde se modifica el modelo de Gurson original, introduciendo unos parámetros constantes de ajuste para describir con mayor precisión el proceso de crecimiento del hueco. Zhang et al. (2001) y Kim et al. (2004) pusieron de manifiesto que estos parámetros también dependen del estado

tensional aplicado, tanto de la triaxialidad como del parámetro de Lode, aunque no lo incorporaron en la formulación del modelo. Siguiendo con esta idea, en el trabajo de Vadillo y Fernández-Sáez (2009) se propuso un modelo GT mejorado, con unos parámetros de ajuste que dependen de la triaxialidad del estado tensional.

No obstante, en la literatura parece existir cierta confusión entre los dos modos de localización del flujo plástico que se producen durante la fractura dúctil. El primero de ellos consiste en la denominada localización macroscópica, estudiada mediante análisis experimentales y teóricos de placas en tensión plana por Marciniak y Kuczyński (1967), la cual está ligada al efecto del ablandamiento debido a la nucleación y crecimiento de microvacíos, dando lugar a una gran irregularidad en la deformación producida en el material que localiza en una banda delgada, con un espesor comparable a la distancia entre huecos. El segundo modo se denomina coalescencia y tiene lugar cuando la deformación plástica se localiza en los ligamentos que separan diferentes microvacíos produciéndose una estricción interna de los mismos, lo que termina provocando la unión de diferentes huecos y la aparición de grietas macroscópicas (Tekoğlu et al., 2015). La distinción entre estos dos modos de localización fue evidenciada en los trabajos computacionales de crecimiento de microvacíos y localización de Koplik y Needleman (1988) y Tvergaard (1982).

1.2 Objetivos

El principal objetivo de esta tesis doctoral es realizar un estudio del proceso de fractura dúctil debido a la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, con el fin de analizar algunos de los factores que afectan a estos procesos y de mejorar los modelos constitutivos que describen estos fenómenos. En concreto, en el desarrollo de este trabajo se han establecido los siguientes objetivos secundarios:

- Desarrollar, basándose en principios micromecánicos, una función de plastificación analítica tipo Gurson que reproduzca correctamente el comportamiento de materiales dúctiles porosos con dependencia de la velocidad de deformación.
- Desarrollar una extensión del modelo Gurson-Tvergaard (GT), para materiales sin dependencia con la velocidad de deformación, teniendo en cuenta el efecto de la triaxialidad y del parámetro de Lode, a través de los parámetros de ajuste del modelo en la formulación de la superficie de plastificación.
- Analizar la interacción que se produce entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales viscoplásticos, dependiendo del estado tensional aplicado y del ángulo de orientación de la banda de localización, mediante el estudio de modelos de celda unitaria con huecos esféricos en su interior.

1.3 Estructura del documento

El trabajo de investigación desarrollado en esta tesis doctoral se ha dividido en siete capítulos. Esta introducción constituye el primer capítulo del documento, destinado a presentar la motivación de esta tesis doctoral, enumerar los diferentes objetivos que se han planteado y destacar las principales contribuciones originales aportadas.

En el segundo capítulo se introducen los principios fundamentales de la Mecánica de Sólidos, necesarios para el posterior desarrollo de esta tesis doctoral.

Se continúa en el tercer capítulo, donde se introduce el concepto de fractura dúctil y sus micromecanismos asociados, para después mostrar una breve revisión de los diferentes modelos analíticos y numéricos que se han desarrollado en la literatura para reproducir este comportamiento.

Por otra parte, en el cuarto capítulo se propone un modelo constitutivo para materiales dúctiles con dependencia de la velocidad de deformación y con huecos cilíndricos en su interior, desarrollando funciones de plastificación analíticas que reproducen el comportamiento de estos materiales.

En el siguiente capítulo se desarrolla una extensión del modelo Gurson-Tvergaard (GT) que añade el efecto de la triaxialidad y el parámetro de Lode en materiales dependientes de la deformación, a través de los parámetros de ajuste del modelo. Dichos modelos se han validado mediante simulaciones numéricas utilizando celdas unitarias.

En el sexto capítulo se realiza un estudio de la interacción que se produce entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales viscoplásticos, teniendo en cuenta diferentes estados tensionales y el ángulos de orientación de la banda de localización.

En el séptimo y último capítulo se recogen las principales conclusiones y se exponen los posibles trabajos futuros de la investigación desarrollada en esta tesis doctoral.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas utilizadas para la realización de este trabajo y los diferentes anexos en los que se amplían partes específicas del documento.

1.4 Contribuciones originales

Las contribuciones originales de la presente tesis doctoral se exponen en los siguientes puntos:

- Se ha propuesto un modelo constitutivo de forma analítica y basándose en principios micromecánicos para materiales dúctiles. En concreto, se han desarrollado dos funciones de plastificación analíticas que reproducen la fase de crecimiento de los huecos cilíndricos en materiales con una dependencia potencial de la velocidad de deformación plástica equivalente.

- Se ha propuesto una modificación del modelo Gurson-Tvergaard que tiene en cuenta la influencia del parámetro de Lode mediante una corrección de los parámetros de ajuste del modelo.
- Se han desarrollado subrutinas de usuario con el objetivo de implementar, en un código de elementos finitos, tanto el modelo de Gurson clásico con dependencia de la velocidad de deformación como el modelo GT y su extensión propuesta en esta tesis doctoral.
- Se ha establecido una metodología de control de las condiciones de contorno para prescribir la triaxialidad y el parámetro de Lode en un modelo de celda unitaria cúbica.
- Se ha realizado una campaña de simulaciones numéricas de modelos de celda unitaria tridimensionales con huecos esféricos en un software de elementos finitos, con el objetivo de estudiar los fenómenos de localización y coalescencia en materiales viscoplásticos para diferentes estados tensionales, ángulos de orientación de la banda de localización y exponentes de endurecimiento por velocidad de deformación del material.

2

Principios fundamentales de la Mecánica de Sólidos

En este capítulo se desarrolla una introducción a los principios fundamentales de la Mecánica de Sólidos, necesarios para el posterior desarrollo de esta tesis doctoral. Con tal fin, se introducen los principales conceptos acerca de la cinemática de sólidos en grandes deformaciones y sus configuraciones, los conceptos de deformación y tensión, los principios de balance clásicos y el principio de objetividad material. Por motivos de simplicidad, muchas de las demostraciones se han omitido. Para obtener una descripción más elaborada, se pueden consultar los libros de Holzapfel (2000), Olivella y de Saracíbar Bosch (2002), de Souza Neto et al. (2011) y Bergstrom (2015), los cuales han sido utilizados para la elaboración del presente capítulo.

2.1 Cinemática en grandes deformaciones

Sea el sólido \mathcal{B} , consistente en infinitos puntos materiales $P \in \mathcal{B}$ en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 en un tiempo t . Durante su movimiento, el cuerpo cambia su posición desde la configuración de referencia Ω_0 hasta la configuración actual Ω , ambas consideradas como regiones del espacio ocupadas por el cuerpo \mathcal{B} en tiempos t diferentes.

La configuración de referencia Ω_0 coincide con la configuración inicial en un tiempo $t = 0$. Según el tiempo evoluciona, un punto material que ocupa una posición dada por el vector \mathbf{X} en la configuración de referencia Ω_0 , se desplaza a una nueva posición dada por el vector \mathbf{x} en la configuración actual Ω (Figura 2.1). Ambos vectores están relacionados biunívocamente por una función de mapeo χ , tal que

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

2.1.1 Descripciones material y espacial

La descripción lagrangiana o material es la representación de las principales variables del proceso de deformación respecto a las coordenadas materiales (X_1, X_2, X_3) y el

tiempo t , dada por $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$. En cambio, la descripción euleriana o espacial es la representación respecto a las coordenadas espaciales (x_1, x_2, x_3) y el tiempo t , dada en la ecuación (2.1). Por tanto, en la descripción euleriana la atención se centra en un punto del espacio, analizando su evolución mientras el tiempo varía.

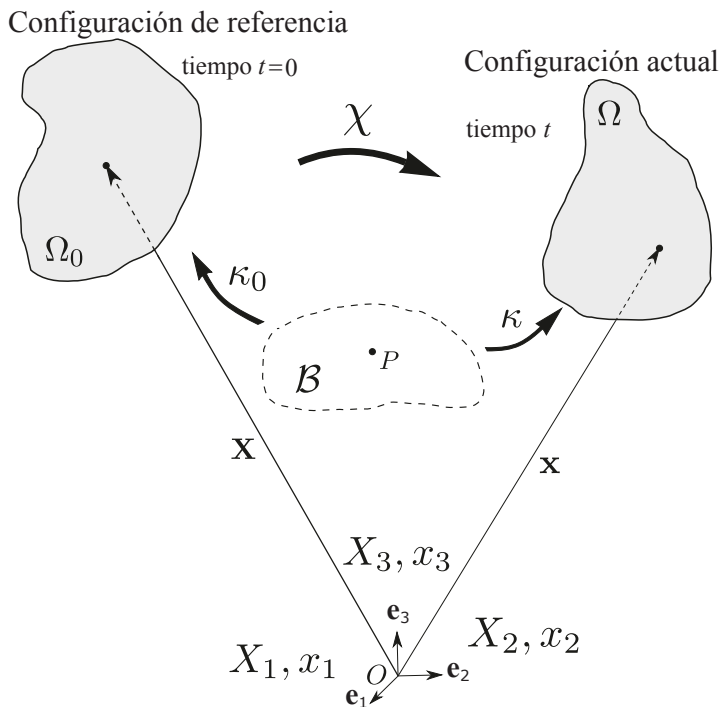


Fig. 2.1 Configuraciones de referencia y actual en un sólido deformable, adaptado de Holzapfel (2000)

Siguiendo la definición de movimiento establecida, la descripción material de la velocidad y de la aceleración vienen dadas por

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

mientras que la descripción espacial de la velocidad y de la aceleración se introducen como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t], \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t]. \quad (2.3)$$

2.2 Descripción de la deformación

Considérense las variaciones de tamaño y forma de un cuerpo que sufre una deformación desde la configuración de referencia Ω_0 hasta la configuración actual Ω .

2.2.1 Tensor gradiente de deformación

La relación entre el elemento de línea infinitesimal actual $d\mathbf{x}$ y el elemento de línea infinitesimal inicial $d\mathbf{X}$ viene dada por

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}, \quad (2.4)$$

donde el tensor gradiente de deformación \mathbf{F} se define como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.5)$$

El gradiente de deformación contiene la información del movimiento relativo y establece una transformación lineal que genera un vector $d\mathbf{x}$ en la descripción espacial por la acción del tensor \mathbf{F} en el vector $d\mathbf{X}$. De una manera similar, los elementos de volumen infinitesimal actual dv y de referencia dV , formados por los elementos de línea infinitesimales $d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{X}$, están relacionados por

$$dv = J(\mathbf{X}, t) dV, \quad (2.6)$$

donde J es el determinante del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} , conocido como deformación volumétrica,

$$J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0. \quad (2.7)$$

2.2.2 Tensores de deformación

En primer lugar, se presentan los principales tensores de deformación utilizados en descripción material. La longitud del elemento de línea material $d\mathbf{X}$ en un punto \mathbf{X} y tiempo $t = 0$ cambia de $d\varepsilon$ a $\lambda d\varepsilon$ en un tiempo t (Figura 2.2). El valor λ se denomina estiramiento y puede ser definido como la longitud $\lambda = \|\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}\|$ del vector de estiramiento $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}$ en la dirección del vector unidad \mathbf{a}_0 ,

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbf{a}_0. \quad (2.8)$$

El estiramiento λ es una medida cuantitativa del módulo del vector $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}$ y su valor da información respecto a la naturaleza del alargamiento, considerando que ha sido extendido si $\lambda > 1$, comprimido si $\lambda < 1$ o si no ha variado su longitud $\lambda = 1$. Utilizando el cuadrado de λ y la definición (2.8) se tiene que

$$\lambda^2 = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0, \quad (2.9)$$

donde

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (2.10)$$

\mathbf{C} es el tensor derecho de Cauchy-Green, el cual es una medida de la deformación en coordenadas materiales.

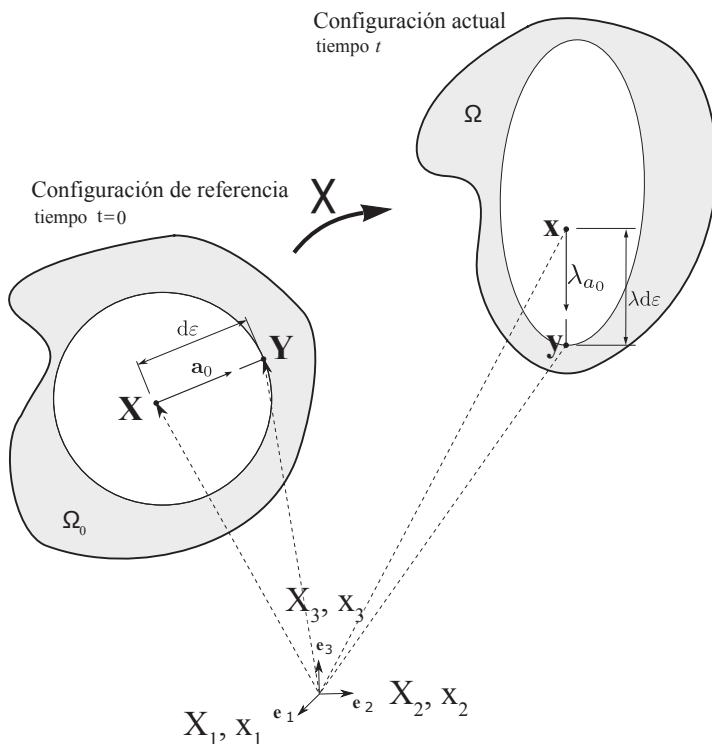


Fig. 2.2 Deformación de un elemento de línea en descripción material, adaptado de Holzapfel (2000)

La variación de las longitudes al cuadrado de los vectores es una medida de deformación alternativa conocida como tensor material de deformación \mathbf{E} o tensor de deformación de Green-Lagrange

$$\frac{1}{2} \left[(\lambda d\varepsilon)^2 - d\varepsilon^2 \right] = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}, \quad (2.11)$$

donde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (2.12)$$

siendo \mathbf{I} el tensor identidad de orden 2.

De manera alternativa, estos tensores de deformación se pueden definir en la descripción espacial si todos los valores se definen en la configuración actual. En este caso, el vector alargamiento λ_a en la dirección del vector λ_a es

$$\lambda_a^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}, \quad (2.13)$$

donde la longitud del vector alargamiento inverso λ_a^{-1} es el alargamiento inverso λ^{-1} . Siguiendo el mismo procedimiento que en la descripción material, el cuadrado del

alargamiento inverso es

$$\lambda^{-2} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{-1} \mathbf{a}, \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$ es la inversa del tensor izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{b} , definido como

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (2.15)$$

también conocido como el tensor de deformación de Finger.

2.2.3 Tensores de velocidad de deformación

En la Mecánica del Medio Continuo es indispensable definir la velocidad de variación de los campos que describen los cambios de forma, posición u orientación en un cuerpo durante el movimiento.

En primer lugar, se introducen los gradientes espacial y material de velocidad y sus descomposiciones. Para ello, se utiliza el gradiente de la velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ en la descripción espacial

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

donde \mathbf{l} es el tensor gradiente espacial de la velocidad, el cual es un tensor de segundo orden no simétrico. Asimismo, esa operación puede ser repetida en la descripción material para obtener el gradiente material de la velocidad. Si se toma la derivada temporal material del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} , se tiene que

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t). \quad (2.17)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.16), el tensor gradiente espacial de la velocidad \mathbf{l} puede reescribirse como

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.18)$$

Además, el tensor gradiente de la velocidad puede descomponerse en su parte simétrica y antisimétrica como

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (2.19)$$

donde

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) = \mathbf{d}^T, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{v} - \text{grad}^T \mathbf{v}) = -\mathbf{w}^T. \quad (2.21)$$

La parte simétrica se corresponde con el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} y la parte antisimétrica es el denominado tensor velocidad de rotación \mathbf{w} o tensor *spin*.

2.3 Concepto de tensión

Sea un sólido deformable continuo \mathcal{B} que ocupa una región en el espacio Ω con un contorno $\partial\Omega$ en un tiempo t (Figura 2.3). A su vez, se consideran unas fuerzas externas arbitrarias aplicadas en el contorno $\partial\Omega$ y un plano π que divide el cuerpo \mathcal{B} en dos partes. Asociado a cada punto \mathbf{x} , perteneciente a la superficie de separación interna, se define un vector normal \mathbf{n} y un elemento infinitesimal de superficie da . Como resultado de la interacción entre las dos porciones, las fuerzas se transmiten a través del plano de la superficie interna generando un vector tensión \mathbf{t} en \mathbf{x} . Esta fuerza por unidad de área $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ se denomina vector tensión de Cauchy, el cual depende de la posición \mathbf{x} y de la normal \mathbf{n} .

Esta configuración tiene su homóloga en la configuración inicial (no deformada), donde el cuerpo \mathcal{B} ocupa una región en el espacio Ω_0 con un contorno $\partial\Omega_0$. En la configuración no deformada, el vector posición, el vector normal y el elemento infinitesimal de superficie tienen la notación \mathbf{X} , \mathbf{N} y dA , respectivamente. El vector tensión $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N})$ en la configuración de referencia representa el primer vector de tensión de Piola-Kirchhoff. Asumiendo el primer Postulado de Cauchy, los vectores tensión \mathbf{t} y \mathbf{T} dependen de las superficies π y π_0 unicamente a través de las normales \mathbf{n} y \mathbf{N} .

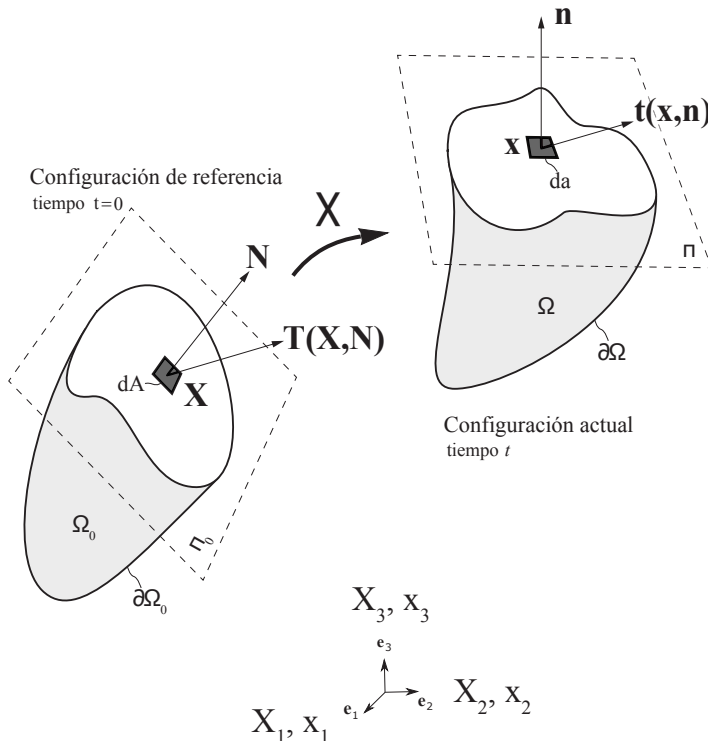


Fig. 2.3 Vectores de tensión actuando en un elemento infinitesimal de superficie, adaptado de Holzapfel (2000)

2.3.1 Teorema de Cauchy

El teorema de Cauchy establece que la dependencia del vector tensión de $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ con la normal \mathbf{n} es lineal y, por tanto, existe un tensor de segundo orden $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ independiente de \mathbf{n} tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (2.22)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor espacial simétrico, el cual se denomina tensor de tensiones de Cauchy. De forma equivalente, en la configuración de referencia se tiene que

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}, \quad (2.23)$$

donde \mathbf{S} representa el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, el cual no es simétrico. La relación entre estos dos tensores de tensiones viene dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{S}\mathbf{F}^T. \quad (2.24)$$

2.4 Ecuaciones de balance

En este apartado se enumera brevemente el conjunto de ecuaciones globales de balance en descripciones espacial y material:

i. Conservación de la masa. Ecuación de continuidad.

$$\int_{\Omega_0} [\rho_0(\mathbf{X}) - \rho(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)J(\mathbf{X}, t)] dV = 0, \quad (2.25)$$

donde $\rho_0(\mathbf{X}) > 0$ y $\rho(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t) > 0$ son masa por unidad de volumen en las configuraciones de referencia y espacial, respectivamente. A su vez, la ecuación de continuidad de la masa en descripción material (o lagrangiana) tiene la forma

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)J(\mathbf{X}, t). \quad (2.26)$$

ii. Balance de la cantidad de movimiento.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} ds + \int_{\Omega} \mathbf{b} dv, \quad (2.27)$$

siendo $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ la fuerza volumétrica en la configuración actual. Por el contrario, en descripción material se tiene la ecuación

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{V} dV = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} dS + \int_{\Omega_0} \mathbf{B} dV, \quad (2.28)$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)$ es la fuerza volumétrica en la configuración de referencia.

iii. *Balance del momento angular.*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) ds + \int_{\Omega} (\mathbf{r} \times \mathbf{b}) dv, \quad (2.29)$$

donde el vector posición \mathbf{r} viene dado por $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0$. En descripción material,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} (\mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{V}) dV = \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) dS + \int_{\Omega_0} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) dV. \quad (2.30)$$

iv. *Balance de la energía.* Primera ley de la termodinámica.

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + e \right) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dv, \quad (2.31)$$

siendo $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, t)$ la descripción espacial del vector de flujo no convectivo de calor por unidad de superficie y $r = (\mathbf{x}, t)$ una función escalar que describe el flujo de calor. Asimismo, en descripción material la primera ley de la termodinámica tiene la forma

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{V}^2 + e_0 \right) dV = \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}) dS + \int_{\Omega_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + R) dV, \quad (2.32)$$

donde \mathbf{Q} y R son el vector de flujo no convectivo de calor por unidad de superficie y el flujo de calor, en descripción en la configuración de referencia.

2.5 Principio de objetividad

El concepto de objetividad es uno de los puntos clave en la descripción del comportamiento a deformación de materiales. Este principio establece que las propiedades constitutivas de un material, incluyendo la deformación, son independientes del observador. Por lo tanto, la formulación del material también tiene que ser independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Sean dos observadores registrando un evento arbitrario en el espacio euclídeo, en términos de la posición en el espacio y en el tiempo, como por ejemplo, la deformación de un sólido en el tiempo. Cada observador puede describir esta deformación utilizando variables cinemáticas, como pueden ser el desplazamiento, la velocidad o la deformación. No obstante, cada observador registra valores distintos de estas variables, debido a que tienen diferentes perspectivas.

Si el movimiento de una partícula es registrado por un primer observador O como $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$, y el mismo movimiento respecto a un segundo observador O^* es $\mathbf{x}^* = \chi^*(\mathbf{X}, t)$,

se puede establecer la relación entre ambos movimientos

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}, \quad (2.33)$$

siendo el vector $\mathbf{c}(t)$ una función continua diferenciable definida como

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_0^* - \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}_0. \quad (2.34)$$

A su vez, $\mathbf{Q}(t)$ es un tensor ortogonal que preserva la distancia entre parejas de puntos, su ángulo y orientación. La dependencia de este tensor con el tiempo refleja el movimiento entre los diferentes observadores en el tiempo.

Asimismo, se puede demostrar que el tensor de tensiones de Cauchy está relacionado con el cambio de observador mediante la transformación

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T. \quad (2.35)$$

Según el principio de objetividad, si se cumple una ecuación constitutiva para el proceso dinámico $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X})$, debe cumplirse también para el proceso dinámico $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{X}^*)$, generado por la transformación de la ecuación (2.33).

Un modelo constitutivo que incumpla el principio de objetividad material se verá afectado por los movimientos de sólido rígido y, por lo tanto, habrá una incoherencia en los resultados obtenidos.

3

Modelos de fractura dúctil

En el presente capítulo se introduce el concepto de fractura dúctil, el cual es fundamental en el desarrollo de esta tesis doctoral. A su vez, se presentan los micromecanismos asociados a este fenómeno de fractura dúctil, para después mostrar una breve revisión de los diferentes modelos analíticos y numéricos que se han desarrollado en la literatura para reproducir este comportamiento. En concreto, se hace especial hincapié en el modelo constitutivo de Gurson y sus extensiones.

3.1 Fractura dúctil

La fractura dúctil es el principal mecanismo de fallo en la mayoría de metales y es primordial en los estudios de integridad estructural, junto con la corrosión y la fatiga. Desde el punto de vista macroscópico, este mecanismo de fallo está asociado a la existencia de deformación plástica en el material, por lo que se requiere una mayor energía de deformación para que se produzca que en el caso de la fractura frágil. Esto se puede apreciar en probetas sometidas a ensayos de tracción unidireccional, donde aparece un cuello de estricción en el material debido a la gran deformación plástica que se produce antes de la rotura. En cambio, desde el punto de vista microscópico, el mecanismo de fractura dúctil dominante en metales y aleaciones metálicas es consecuencia de la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos (ver Figura 3.1).

Con el objetivo de poder analizar de manera cuantitativa los fenómenos de fractura dúctil, es necesario conocer sus mecanismos responsables. En los trabajos de Stone et al. (1985), Vadillo (2007), Benzerga y Leblond (2010) y Besson (2010) se pueden encontrar revisiones completas de los mecanismos básicos asociados a la fractura dúctil, así como los diferentes modelos que reproducen el comportamiento de los materiales que sufren estos fenómenos.

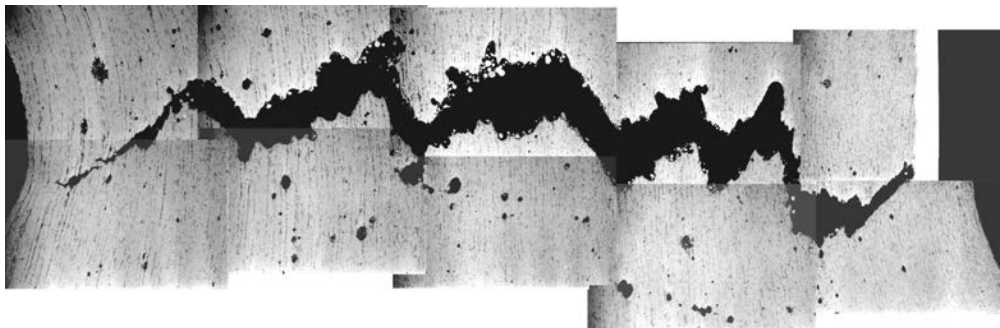


Fig. 3.1 Propagación de una fractura dúctil por crecimiento y coalescencia de huecos en un acero inicialmente homogéneo (Benzerga y Leblond, 2010)

3.1.1 Mecanismos micromecánicos

Mediante el uso de técnicas metalográficas, Tipper (1949) fue el primero en mostrar que las cavidades internas, que finalmente coalescen y generan la fractura en un test de tracción, eran generadas en partículas de segundas fases. A su vez, Puttick (1959) empleó microscopía óptica para mostrar que en diferentes materiales se producía la nucleación de huecos durante el proceso de deformación en partículas de segundas fases no metálicas, normalmente impurezas.

En un estudio más exhaustivo, Rogers (1960) utilizó microscopía óptica para analizar la rotura de probetas de tracción de cobre y demostró que el proceso de fractura dúctil en ese material era producido por la formación de huecos que crecen a medida que aumenta la deformación plástica y que terminan coalesciendo para generar una superficie libre o grieta en la zona de sección mínima de la probeta. La rotura final se produce con la característica apariencia copa-cono, donde la parte plana o copa se forma debido a la grieta interna y la parte del cono es producida por las tensiones de cortadura. Este modo de fractura está fuertemente influido por el estado tensional durante el proceso de deformación plástica, tal y como puso de manifiesto Bridgman (1952) en su análisis de la estricción en probetas sometidas a tracción.

La causa más estudiada del proceso de fractura dúctil es la motivada por la fracción en volumen de inclusiones y partículas de segundas fases en el material (Baldwin y Edelson, 1962). Asimismo, Bourcier et al. (1986) demostraron una fuerte dependencia de la porosidad inicial en la ductilidad de materiales.

3.2 Modelización micromecánica

3.2.1 Nucleación de microvacíos

La nucleación de microvacíos se produce generalmente en sistemas que contienen partículas de segundas fases o inclusiones, cuando se alcanza una tensión suficiente para romper los

enlaces entre matriz y partícula, o bien, cuando se produce la rotura de esta última que, por lo general, es menos deformable que la matriz (Figura 3.2). Cuando la nucleación se produce a causa de la presencia de una sola fase dispersa, la superficie de fractura presenta un aspecto con cúpulas de tamaño uniforme, pero cuando los huecos se nuclean alrededor de partículas de distintos tamaños, aparecen también distintos tamaños de cúpulas. Por lo general, la nucleación se inicia en partículas de mayor tamaño con valores bajos de tensión y deformación, y cuando estos valores aumentan, otras partículas de menor tamaño aceleran el proceso de fractura.

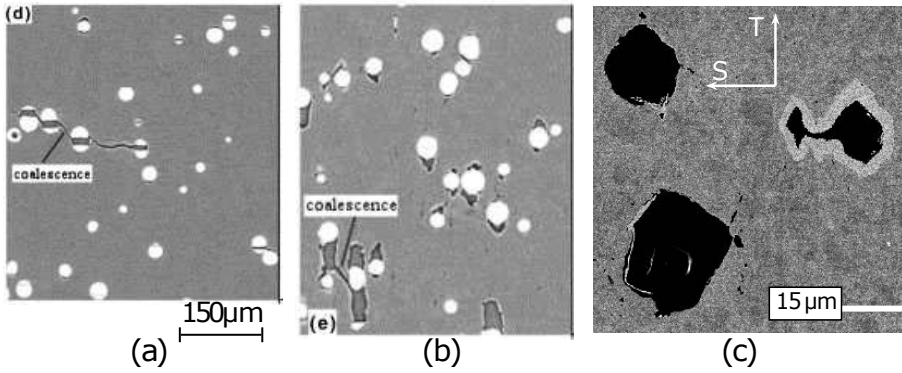


Fig. 3.2 Micromecanismos de fractura dúctil. (a) Rotura de partículas, formación de grietas con forma de moneda y coalescencia de huecos un compuesto con matriz metálica (matriz dura) (Babout et al., 2004). (b) Decohesión y crecimiento de huecos hasta la coalescencia en un compuesto con matriz metálica (matriz blanda) (Babout et al., 2004). (c) Crecimiento de huecos y coalescencia en un acero C-Mn (Benzerga, 2000)

El estudio de la nucleación de microvacíos mediante el uso de modelización micromecánica es bastante más limitado que el estudio del crecimiento de huecos. Esto es debido a las dificultades intrínsecas de la introducción de las propiedades del material de las inclusiones y, en algunos casos, de las intercaras matriz/inclusión. Dependiendo del tamaño de las partículas nucleadoras, la modelización debe considerar las tensiones y deformaciones a escala de dislocaciones (partículas pequeñas) o en la escala de la Mecánica del Medio Continuo (partículas grandes).

El primer grupo engloba los casos con partículas nucleadoras de tamaño menor a $2 \mu m$, donde la deformación de nucleación se ve muy influenciada por el radio de las partículas. En este caso, se utilizan modelos de dislocaciones para calcular la concentración de tensiones producida en la intercara matriz-partícula. Goods y Brown (1979) realizaron un modelo de dislocaciones para partículas con forma aproximadamente esférica, que predice que la nucleación tiene lugar cuando la deformación principal máxima ε_1 alcanza un valor crítico ε_{1n} , dado por la ecuación

$$\varepsilon_{1n} = Kr (\sigma_c - \sigma_h)^2, \quad (3.1)$$

donde K es una constante del material relacionada con la fracción volumétrica de partículas presentes, r es el radio de la partícula, σ_c es la tensión de cohesión matriz-partícula y σ_h es la tensión hidrostática.

Por otro lado, el segundo grupo de modelos de nucleación engloba casos con tamaños de partículas de diámetros mucho mayores que $2 \mu m$, donde el tamaño de la partícula ya no influye en la tensión de nucleación y se puede aplicar la Mecánica de Medios Continuos para estimar la concentración de tensiones en la intercara matriz-partícula. Aquí se encuentra el modelo de Argon et al. (1975a,b), donde se establece que la nucleación de un microvacío se produce cuando el valor de la tensión en la intercara σ_c alcanza un valor crítico. Esta tensión se define como

$$\sigma_c = \bar{\sigma} + \sigma_m, \quad (3.2)$$

siendo $\bar{\sigma}$ la tensión equivalente de Von Mises y σ_m la tensión hidrostática.

Beremin (1981), tras estudios experimentales, propuso una modificación del modelo anterior, definiendo la tensión de intercara como

$$\sigma_c = \sigma_m + C(\bar{\sigma} - \sigma_y), \quad (3.3)$$

donde σ_y es el límite elástico del material y C una constante de ajuste.

Es importante destacar, que los modelos mencionados únicamente tienen en cuenta la nucleación de microvacíos debido a la separación entre partícula y matriz y, por lo tanto, no contemplan la rotura de partículas o inclusiones, que también forman parte de los fenómenos responsables de la generación de huecos (Lloyd, 1991; Needleman et al., 1993; Shabrov et al., 2004).

Del mismo modo, en los códigos de cálculo por elementos finitos se utilizan modelos de nucleación que tienen en cuenta la fracción de partículas nucleadas f_n , como una variable aleatoria con una determinada distribución de probabilidad. Para el caso dominado por la deformación plástica, Chu y Needleman (1980) propusieron un modelo de nucleación de la forma

$$df = f_\varepsilon(\bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p, \\ f_\varepsilon(\bar{\varepsilon}^p) = A = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \bar{\varepsilon}_N}{s_N} \right)^2 \right], \quad (3.4)$$

siendo $\bar{\varepsilon}_N$ la media de la distribución normal, s_N la desviación típica y f_N la amplitud de la distribución.

En cambio, para la nucleación dominada por la tensión, el modelo probabilístico tiene la forma

$$df = f_\varepsilon(\bar{\sigma} + \sigma_m) d(\bar{\sigma} + \sigma_m),$$

$$f_\varepsilon(\bar{\sigma} + \sigma_m) = B = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\sigma} + \sigma_m - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

siendo, en este caso, $\bar{\sigma}$ la media de la distribución, $\bar{\sigma}$ el límite elástico y σ_m la tensión hidrostática.

3.2.2 Crecimiento de microvacíos

El crecimiento de microvacíos es el proceso de agrandamiento de cavidades debido a una fuerte localización de la deformación plástica. Esta fase de crecimiento se produce durante la mayor parte del proceso de fractura dúctil en muchas aleaciones, por lo que se puede decir que la ductilidad de estos materiales es fuertemente dependiente del crecimiento de huecos antes de la coalescencia. Shockey et al. (1978) estimaron que más del 87% de la energía consumida durante el proceso de fractura dúctil de un acero de alta resistencia es absorbido durante la fase de crecimiento de microvacíos.

Se han realizado diversos estudios sobre probetas ensayadas a tracción donde se asegura la gran influencia que tiene el estado tensional aplicado en el desarrollo de los microvacíos (Hancock y Mackenzie, 1976; Le Roy et al., 1981). Entonces, un estado tensional triaxial como el que se produce en el centro de una probeta de tracción conduce a una aceleración del crecimiento de los microvacíos, donde los huecos que inicialmente fueran esféricos continuarían siendo aproximadamente esféricos. No obstante, cerca de la superficie exterior del espécimen, donde la triaxialidad del estado tensional es menor, la forma de los huecos tiende a ser elipsoidal, con su eje mayor orientado en la dirección de la tensión aplicada.

Con el fin de investigar la dependencia del estado tensional con la velocidad de crecimiento del hueco, McClintock (1968) consideró un cilindro largo con hueco compuesto de un material con comportamiento perfectamente plástico sometido a tensiones bidimensionales, donde la velocidad de crecimiento del radio medio de la cavidad \dot{R} se puede expresar como

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^p \sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left(\frac{(1-n)\sigma_m \sqrt{3}}{\sigma_{eq}} \right), \quad (3.6)$$

siendo R el radio medio de la cavidad, $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ la velocidad de deformación equivalente de Von Mises, n el exponente de endurecimiento por deformación, σ_m la tensión hidrostática y σ_{eq} la tensión equivalente de Von Mises.

Rice y Tracey (1969) utilizaron un método iterativo de Rayleigh-Ritz para obtener una solución aproximada para el crecimiento de un único hueco esférico en una matriz

infinita constituida por un material idealmente plástico sometido a un estado tensional remoto, obteniendo una expresión bastante aproximada incluso a baja triaxialidad,

$$\frac{\dot{R}_0}{\dot{\epsilon} R_0} \approx 0.283 e^{\frac{3\sigma_m}{2\sigma_{eq}}} \approx 0.566 \sinh \left[\frac{3\sigma_m}{2\sigma_{eq}} \right], \quad (3.7)$$

donde R_0 y \dot{R}_0 es el radio inicial de la cavidad y su velocidad de crecimiento, $\dot{\epsilon}$ la velocidad de deformación, σ_m la tensión hidrostática y σ_{eq} la tensión equivalente de Von Mises.

3.2.3 Coalescencia de microvacíos

La parte final del proceso de fractura dúctil consiste en la coalescencia de los huecos formados en la matriz plástica. Experimentalmente, el fenómeno de coalescencia es el más difícil de analizar debido a que al contrario que la nucleación y el crecimiento de huecos, que ocurren de forma más estable, la coalescencia sucede de manera repentina y catastrófica.

Cottrell (1959) sugirió que el fenómeno de coalescencia se debe a una estricción de la parte de la matriz restante entre huecos hasta que el ligamento pierde totalmente su sección transversal. A su vez, Rogers (1960) y Druyvesteyn et al. (1964) propusieron que la coalescencia era producida por la formación de microvacíos secundarios en bandas de cortadura localizadas entre los bordes de los huecos principales, formando ángulos de 30° a 40° con la dirección en la que se aplica la tensión. Por otra parte, Puttick (1959) observó que este fenómeno sucedía en hierro policristalino debido a la propagación de pequeñas grietas entre los agujeros nucleados en inclusiones. Además, Rosenfield y Hahn (1966) sugirieron que el fallo se producía por una rotura catastrófica de los ligamentos de los huecos, una vez que estos han alcanzado su tamaño crítico.

Los procesos de coalescencia tienen una alta variabilidad y el mecanismo que lo produce tiene una alta dependencia con la distribución de tamaño de las partículas de segundas fases, de las tensiones de interfase entre la matriz y la inclusión no metálica y de las características deformacionales de la propia matriz. El análisis del proceso de coalescencia de huecos es importante para obtener materiales de una determinada tenacidad de fractura. Para mejorar dicha propiedad es necesario conseguir una microestructura capaz de favorecer el crecimiento prolongado de los huecos, retrasando lo máximo posible su coalescencia.

Un modelo fundamental para analizar el proceso de coalescencia de huecos es el propuesto por Thomason (1990). En él, se pone de manifiesto que el proceso de coalescencia depende de la coexistencia de dos modos de deformación. En la primera etapa, los microvacíos tienen un tamaño reducido y la tensión requerida para que se obtenga un estado de deformación homogéneo es menor que la necesaria para que esta localice y, por lo tanto, el estado de deformación plástica homogéneo se produce más fácilmente.

A medida que la deformación y la fracción volumétrica de huecos van aumentando, la tensión necesaria para localizar la deformación decrece. Entonces, cuando la tensión necesaria para la localización tiene el mismo valor que la correspondiente a deformación homogénea, se produce la coalescencia.

3.3 Modelos constitutivos

Una manera de analizar el proceso de fractura dúctil, desde el punto de vista de la Mecánica del Medio Continuo, consiste en la modelización del material poroso como si fuera un medio continuo con leyes constitutivas que simulen su comportamiento elastoplástico, incluyendo la nucleación de microvacíos, su crecimiento y coalescencia. Estas leyes constitutivas deben estar formadas por las siguientes ecuaciones:

- Función de plastificación que relacione la evolución de la deformación plástica con el estado tensional.
- Criterios de nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos.
- Leyes de evolución de las propiedades del material.

3.3.1 Modelo de Gurson

Dentro de este grupo de modelos, uno de los más reconocidos y utilizados es el propuesto por Gurson et al. (1977). En él se desarrolla un criterio de plastificación para materiales porosos, realizando un proceso de homogeneización mediante el uso de una celda unitaria esférica con un hueco esférico en su interior, donde la matriz tiene un comportamiento rígido perfectamente plástico. La superficie de plastificación propuesta originalmente por Gurson tiene la forma

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh\left(\frac{3\Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0, \quad (3.8)$$

donde f es la fracción volumétrica de microvacíos en el material, Σ_{eq} representa la tensión macroscópica equivalente de Von Mises del material homogeneizado

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}},$$

donde \mathbf{S} es el tensor desviador de tensiones de Cauchy

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Sigma} + \Sigma_h : \mathbf{1},$$

siendo $\mathbf{\Sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy y Σ_h la tensión hidrostática macroscópica

$$\Sigma_h = \frac{1}{3} \mathbf{\Sigma} : \mathbf{1}$$

y $\bar{\sigma}$ el límite elástico actual de la matriz, que en el caso del material rígido perfectamente plástico contemplado por Gurson es igual a una constante ($\bar{\sigma} = \sigma_0$).

Este criterio se desarrolla de forma equivalente para una celda cilíndrica con hueco cilíndrico, resultando la superficie de plastificación

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_{\alpha\alpha}, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Sigma_{\alpha\alpha}}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - f^2 = 0, \quad (3.9)$$

donde $\Sigma_{\alpha\alpha}$ representa la tensión macroscópica hidrostática en el plano transversal.

Se puede apreciar que el criterio de plastificación del modelo de Gurson depende del valor de la tensión hidrostática, a diferencia de las teorías clásicas, como por ejemplo la teoría de plasticidad J_2 . Asimismo, se puede observar que la superficie de fluencia se reduce al criterio de plastificación de Von Mises en el caso en que $f = 0$.

3.3.2 Modelo de Gurson modificado (GTN)

El modelo de Gurson fue generalizado posteriormente por Tvergaard (1981, 1982) y por Tvergaard y Needleman (1984), introduciendo unos parámetros (q_1 , q_2 y q_3) y una fracción de volumen de microvacíos modificada (f_*), con el fin de mejorar la predicción del criterio e introducir el fenómeno de coalescencia. La superficie de plastificación resultante es

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f_*) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f_* \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_1^2 f_*^2 = 0, \quad (3.10)$$

Los parámetros de ajuste q_1 y q_2 permiten describir de una manera más aproximada el proceso de crecimiento de los huecos observados en cálculos de modelos de celda unitarios. Teniendo en cuenta un trabajo posterior de Koplik y Needleman (1988), el valor de estos parámetros suele tomarse como constante ($q_1 = 1.5$ y $q_2 = 1.0$). La variable f_* , que podría ser interpretada como una porosidad efectiva, es una función de la porosidad f . Se asume que cuando se alcanza la porosidad crítica f_c , el daño incrementa en el modelo de manera más rápida. Para expresar esta tendencia, f_* se define como

$$f_* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \left(\frac{1}{q_1} - f_c\right) \frac{f - f_c}{f_R - f_c} & \text{si } f > f_c. \end{cases}$$

La fractura del material tiene lugar cuando se alcanza el valor de rotura f_R , donde $f_* = 1/q_1$.

En este modelo, la evolución de la porosidad viene dada por la suma de los términos referentes a la nucleación de nuevos microvacíos y a la variación de tamaño de cavidades ya existentes,

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{nucleación}} + \dot{f}_{\text{crecimiento}}. \quad (3.11)$$

La nucleación de microvacíos se tiene en cuenta frecuentemente considerando la propuesta de Chu y Needleman (1980) para casos dominados por la deformación plástica, donde

$$\dot{f}_{nucleación} = A\dot{\bar{\varepsilon}}^p, \quad (3.12)$$

siendo $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ la velocidad de deformación plástica equivalente y A la función Gaussiana de la ecuación (3.4),

$$A = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right].$$

Esta ley introduce tres nuevos parámetros del material: la fracción volumétrica de microvacíos f_N en la que el daño puede ser nucleado, la deformación ε_N a la que el 50% de las inclusiones se rompen y la desviación típica s_N de la deformación de nucleación. Chu y Needleman (1980) utilizaron los valores $\varepsilon_N = 0.3$ y $s_N = 0.1$, lo que significa que para $\bar{\varepsilon}^p = 0.3$ la mitad de las inclusiones se habrían roto y para $\bar{\varepsilon}^p = 0.5$, lo hubiera hecho el 98% de las inclusiones. Además, la variación de tamaño de huecos está basada en la ley de conservación de la masa y se define como

$$\dot{f}_{crecimiento} = (1 - f)\dot{\varepsilon}_{vol}^p, \quad (3.13)$$

donde $\dot{\varepsilon}_{vol}^p$ es la velocidad de deformación plástica volumétrica.

3.3.3 Otras extensiones del Modelo de Gurson

Zhang et al. (2000) y Zhang (2001) propusieron, partiendo del modelo de Gurson modificado (GTN) y de un criterio cuantitativo de coalescencia desarrollado por Thomason (1990), un modelo mejorado que se ha denominado "modelo de Gurson completo". En él, el valor de f_c no se toma como constante, sino que en cada punto material toma un valor de f correspondiente al criterio de coalescencia.

Este modelo de Gurson completo ha sido utilizado en el análisis de problemas estructurales como el del comportamiento en fractura de uniones soldadas (Peñuelas Sánchez, 2005).

Hay que destacar, que el modelo de Gurson original fue desarrollado para problemas estáticos. No obstante, diferentes autores lo han aplicado también en problemas dinámicos, donde se consideran efectos inerciales y la influencia de la velocidad de deformación en las propiedades del material (Becker, 2002; Børvik et al., 2003; Pan et al., 1983; Peirce et al., 1984; Tvergaard y Needleman, 1986; Worswick y Pelletier, 1998; Worswick y Pick, 1995). Betegón et al. (2006) desarrollaron un método implícito para integrar las ecuaciones del modelo de Gurson completo, con el objetivo de aplicarlo a problemas dinámicos.

Srikanth y Zabaras (1999) propusieron un modelo termomecánico acoplado con daño dúctil, aplicado al análisis de procesos de conformado de metales, aunque en este trabajo no se considera ningún efecto dinámico en el modelo. Otros autores (Eberle et al.,

2000; Hao y Brocks, 1997; Koppenhoefer y Dodds, 1998; Needleman y Tvergaard, 1991; Tvergaard y Needleman, 2000) han aplicado el modelo de Gurson incluyendo efectos de la velocidad de deformación y de la temperatura.

El modelo de Gurson y las modificaciones que se han reseñado consideran que los microvacíos son inicialmente esféricos y que estos mantienen su forma esférica durante todo el proceso de deformación. En cambio, realmente dependiendo del procedimiento de fabricación del material, los huecos pueden tener inicialmente formas diferentes. De hecho, aunque se consideraran todos los microvacíos inicialmente esféricos, el campo tensional aplicado puede modificar su forma inicial de manera considerable. Con el objetivo de tener en cuenta la influencia de estos fenómenos, se han realizado otras modificaciones en el modelo GTN, entre las que se pueden destacar las propuestas por Gologanu et al. (2001a,b). Aquí se consideran modelos de nucleación en capas y en columnas, que estudian además el cambio de forma de los huecos durante su crecimiento.

Asimismo, se han desarrollado modelos no locales aplicados a la porosidad (Leblond et al., 1994a; Tvergaard y Needleman, 1995), donde se consideran que los valores de esta variable son valores medios correspondientes a regiones colindantes con el punto considerado, o de una forma más general, a la tensión de flujo del material de la matriz, que va a depender de la deformación plástica y también de sus derivadas (Ramaswamy y Aravas, 1998a,b; Reusch et al., 2003).

Por otra parte, también se han propuesto métodos basados en principios variacionales para materiales porosos con dependencia potencial de la velocidad de deformación (Ponte Castañeda, 1991; Ponte Castañeda y Zaidman, 1994; Willis, 1992). A su vez, para capturar el comportamiento dúctil de materiales porosos dependientes de la velocidad de deformación, se han propuesto diferentes mejoras del modelo de Gurson que incluyen el efecto de la viscoplasticidad para un límite elástico con ley potencial (Danas et al., 2008; Găărău et al., 2000; Leblond et al., 1994b).

Cabe destacar, que la mayor parte de estos modelos, pese a su indudable rigor formal, complican de gran manera el ya complejo modelo de Gurson modificado. Por lo tanto, hoy en día su implementación es muy compleja en aplicaciones de ingeniería, exigiendo en muchos casos un gran coste computacional para abordar el problema.

3.4 Modelos computacionales de celda unitaria

Los análisis micromecánicos realizados mediante cálculo computacional con elementos finitos han demostrado ser de una gran utilidad, sirviendo de guía para el desarrollo de modelos de fractura dúctil mejorados. Una manera común de afrontar este tipo de análisis consiste en la utilización de un volumen representativo de un conjunto, conteniendo un único hueco o partícula. Esto incluye los análisis pioneros realizados por Needleman (1972) y Tvergaard (1981) para una conjunto cuadrado de huecos cilíndricos, por Tvergaard (1982) y Koplik y Needleman (1988) para huecos esféricos y los realizados por Needleman

(1987) para partículas esféricas inicialmente unidas a una matriz dúctil. En la Figura 3.3 se puede ver un ejemplo de un conjunto periódico de celdas que contienen un hueco esférico cada una, simplificado mediante el uso de un único modelo de celda unitaria axisimétrico.

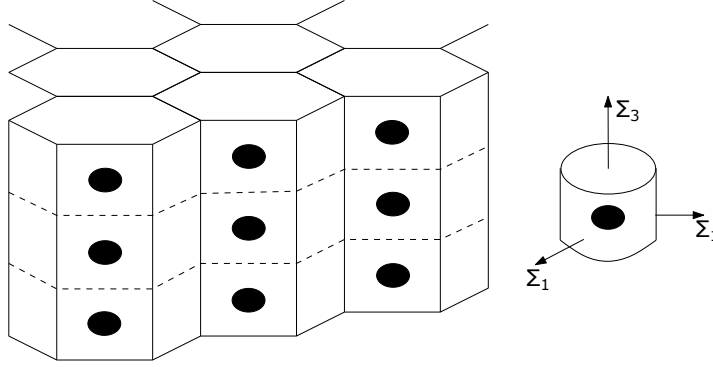


Fig. 3.3 Modelo de celda unitaria axisimétrico representando una microestructura periódica con huecos esféricos (Benzerga y Leblond, 2010)

Asimismo, este tipo de modelos de celda unitaria permiten analizar de manera sencilla el efecto de diversos parámetros micromecánicos (Brocks et al., 1995), como pueden ser partículas de segundas fases y población de huecos (Fabregue y Pardoën, 2008; Faleskog y Shih, 1997; Fritzen et al., 2012; Steglich y Brocks, 1997), forma de la celda o del hueco (Pardoën y Hutchinson, 2000), anisotropía del material (Keralavarma et al., 2011), efectos de estados de carga complejos (Gao y Kim, 2006; Scheyvaerts et al., 2011; Srivastava y Needleman, 2012; Tvergaard, 2009) o endurecimiento de la matriz (Faleskog et al., 1998; Gao et al., 1998; Lecarme et al., 2011).

También se han utilizado modelos de celda unitaria para estudiar la coalescencia de microvacíos, determinando, por ejemplo, los valores de porosidad en el comienzo del proceso de coalescencia (Zhang et al., 2000).

4

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos

Funciones de plastificación

En este capítulo se propone un modelo constitutivo, basado en el propuesto originalmente por Gurson, para materiales dúctiles con dependencia de la velocidad de deformación. Para ello, se emplea un modelo de celda cilíndrica con hueco cilíndrico, desarrollando la formulación necesaria para generar funciones de plastificación analíticas que tengan en cuenta el comportamiento viscoplástico del material. Asimismo, se comparan los resultados con otros modelos existentes para validar su correcto funcionamiento.

4.1 Introducción

Como se ha citado anteriormente, el proceso de fractura dúctil en metales y aleaciones metálicas está ligado normalmente a un mecanismo de fallo producido por la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Para tratar de reproducir este comportamiento en materiales porosos, se han propuesto numerosos modelos. El más reconocido es el introducido originalmente por Gurson et al. (1977), donde se propone una función de plastificación macroscópica para un material rígido perfectamente plástico que contiene un hueco cilíndrico o esférico con una matriz con plasticidad Von Mises (más detallado en el apartado 3.3.1).

En las últimas cuatro décadas, varias extensiones de dichos modelos se han desarrollado con el objetivo de mejorar la predicción de la respuesta en metales dúctiles: nucleación y coalescencia (Chu y Needleman, 1980; Tvergaard y Needleman, 1984), efecto de la forma del hueco (Gologanu et al., 1993, 1994; Madou y Leblond, 2012a,b; Pardoen y Hutchinson, 2000), endurecimiento por deformación (Leblond et al., 1995), anisotropía plástica del material de la matriz (Benzerga et al., 2004; Cazacu y Stewart, 2009; Stewart y Cazacu, 2011), influencia del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras en la plastificación de materiales porosos (Benallal et al., 2014; Vadillo et al., 2016), etc.

Asimismo, para materiales viscoplásticos, una de las modificaciones más empleadas del modelo de Gurson es la de reemplazar, en la superficie de plastificación, la constante

del material σ_0 por el límite elástico de la matriz $\bar{\sigma}(\dot{\bar{\epsilon}})$, la cual es dependiente de la velocidad de deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}$. También para materiales con dependencia potencial de la velocidad de deformación, se han propuesto métodos basados en principios variacionales (Ponte Castañeda, 1991; Ponte Castañeda y Zaidman, 1994; Willis, 1992), con resultados bastante precisos para valores bajos y moderados de la triaxialidad. No obstante, para valores altos de la triaxialidad los modelos variacionales pierden precisión respecto a los modelos tipo Gurson, dando lugar a predicciones poco realistas. Danas et al. (2008) e Idiart (2008) introdujeron mejoras en este sentido.

A su vez, para capturar el comportamiento dúctil de materiales porosos dependientes de la velocidad de deformación, se han propuesto diferentes mejoras del modelo de Gurson que incluyen el efecto de la viscoplasticidad para un límite elástico con una ley potencial (Gărăjeu et al., 2000; Leblond et al., 1994b). Estas aproximaciones basadas en el modelo de Gurson, desde un punto de vista práctico, requieren de un alto coste computacional y su implementación es compleja.

Basándose en principios micromecánicos, el principal objetivo de este trabajo es el de proponer, para un amplio rango de valores de la triaxialidad tensional y utilizando únicamente parámetros independientes del material, una función de plastificación tipo Gurson simple y precisa, que reproduzca correctamente el comportamiento de materiales porosos con dependencia de la velocidad de deformación.

4.2 Celda unitaria cilíndrica con hueco cilíndrico

Los microvacíos de forma cilíndrica aparecen de manera general en la región de formación de cuellos de estricción en muestras sometidas a tracción tras grandes deformaciones y en las intercaras de ciertas aleaciones, entre inclusiones y matriz (Chen et al., 2005). Debido a ello, el uso de modelos cilíndricos es utilizado frecuentemente en estudios de materiales que contienen cavidades en su interior.

En este trabajo, se considera un modelo de celda unitaria de material poroso, representando un conjunto con una distribución periódica de microvacíos. Dicha celda se compone de un cilindro de pared gruesa (matriz) que contiene un hueco cilíndrico pasante, tal y como se muestra en la Figura 4.1. La matriz está compuesta de un material incompresible con comportamiento viscoplástico. El radio del hueco y del cilindro se denominan a y b , respectivamente, el radio en un punto arbitrario de la matriz es r y la altura del cilindro H . Se define el volumen total de celda como $V = \Omega + V_m$, siendo Ω el volumen del hueco cilíndrico y V_m el de la matriz.

La porosidad de la celda f se define como la fracción en volumen del tamaño del hueco en relación al total de la celda,

$$f = \frac{\Omega}{V} = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad (4.1)$$

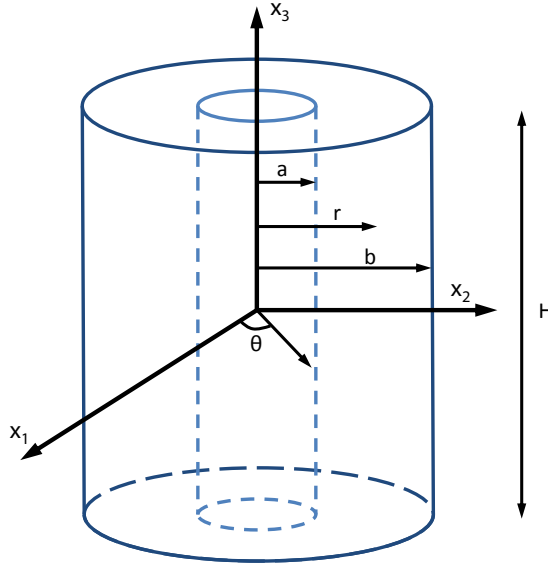


Fig. 4.1 Modelo de celda cilíndrica con hueco

4.3 Formulación de la función de plastificación

Se asume que tanto la celda como el hueco mantienen su forma cilíndrica durante todo el proceso de carga. Debido a la condición de axisimetría del problema se utilizan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Por lo tanto, las ecuaciones de gobierno empleadas son las siguientes, donde todas las variables de campo son función del radio r . En primer lugar, se tiene la ecuación de equilibrio

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (4.2)$$

que hace referencia a las componentes de tensión radial σ_r y acimutal σ_θ . Por otra parte, dado que las deformaciones elásticas que se producen en la matriz se van a considerar despreciables y, por lo tanto, el volumen de la misma no varía, se tiene la condición de incompresibilidad de la matriz

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (4.3)$$

donde $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_\theta$ y $\dot{\epsilon}_z$ son las velocidades de deformación coordenadas cilíndricas. Por último, la regla de flujo de Von Mises del material genera las expresiones

$$\sigma'_r = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}'_r, \quad \sigma'_\theta = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}'_\theta \quad \text{y} \quad \sigma'_z = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}'_z, \quad (4.4)$$

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

las cuales relacionan las componentes desviadoras de tensiones ($\sigma'_r = \sigma_r - \sigma_h$, $\sigma'_\theta = \sigma_\theta - \sigma_h$ y $\sigma'_z = \sigma_z - \sigma_h$, siendo $\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)$) y las velocidades de deformación, con el límite elástico $\bar{\sigma}$ y la velocidad de deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}$.

Las condiciones de contorno del problema planteado se imponen de tal modo que se obtiene un estado de carga axisimétrico en el cilindro, donde la tensión en dirección radial en la superficie libre del interior del hueco es nula (ver Figura 4.2),

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = \Sigma_r, \quad \sigma_z(\pm H/2) = \Sigma_z. \quad (4.5)$$

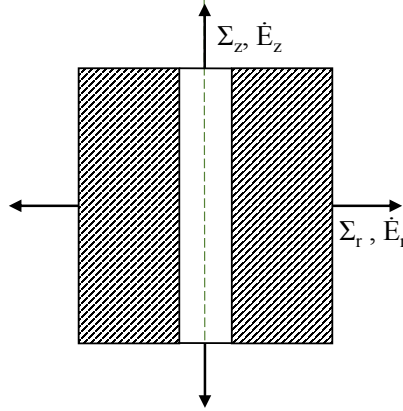


Fig. 4.2 Representación 2D de la sección longitudinal del cilindro con hueco, con detalle de las direcciones utilizadas para las tensiones y velocidades de deformación macroscópicas

Las definiciones de las tensiones macroscópicas en la celda son

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_r = \frac{1}{V} \int_V \sigma_r dV, \quad \Sigma_3 = \Sigma_z = \frac{1}{V} \int_V \sigma_z dV. \quad (4.6)$$

Asimismo, debido a la axisimetría del problema se tiene que la tensión macroscópica en los ejes 1 y 2 es la misma ($\Sigma_1 = \Sigma_2$). En consecuencia la tensiones macroscópicas hidrostática Σ_h y equivalente Σ_{eq} se pueden expresar como

$$\Sigma_h = \frac{1}{3} (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) = \frac{2\Sigma_1 + \Sigma_3}{3}, \quad (4.7)$$

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_1 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2]} = |\Sigma_3 - \Sigma_1|. \quad (4.8)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la forma de las componentes de la velocidad de deformación en coordenadas cilíndricas

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{E}_3, \quad (4.9)$$

4.3 Formulación de la función de plastificación

y sustituyendo en la condición de incompresibilidad de la ecuación (4.3),

$$rd\dot{u} + dr \cdot \dot{u} + \dot{E}_3 r dr = 0,$$

se pueden relacionar las componentes microscópicas de la deformación en cualquier punto del cilindro con la velocidad de deformación longitudinal macroscópica \dot{E}_3 , una constante A independiente del radio, la distancia radial al eje r y la velocidad \dot{u} ,

$$d(r\dot{u}) = -\dot{E}_3 r dr \quad \Rightarrow \quad r\dot{u} = -\int_a^b \dot{E}_3 r dr = -\dot{E}_3 \frac{r^2}{2} + A. \quad (4.10)$$

A partir de la relación de la ecuación (4.10) se pueden expresar las componentes microscópicas radial y acimutal de la velocidad de deformación en función de \dot{E}_3 , A y r .

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr} = -\frac{\dot{E}_3}{2} - \frac{A}{r^2}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r} = -\frac{\dot{E}_3}{2} + \frac{A}{r^2}. \quad (4.12)$$

Para determinar el sentido físico de la constante A , se considera un hueco cilíndrico con una altura finita H , donde su volumen se define mediante la siguiente expresión:

$$\Omega = \pi a^2 H.$$

Por lo que la velocidad de crecimiento del hueco es

$$\dot{\Omega} = 2\pi a \dot{a} H + \pi a^2 \dot{H} \quad (4.13)$$

y la velocidad de crecimiento del hueco relativa,

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = 2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{H}}{H}. \quad (4.14)$$

Entonces, sabiendo que $\dot{\epsilon}_r|_a = \frac{\dot{a}}{a}$ y $\dot{E}_3 = \frac{\dot{H}}{H}$ y utilizando la expresión (4.14) tenemos

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = 2\left(-\frac{\dot{E}_3}{2} - \frac{A}{a^2}\right) + \dot{E}_3 = -\frac{2A}{a^2},$$

$$A = -\frac{a^2}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}. \quad (4.15)$$

A es, por tanto, una constante que únicamente depende del tamaño del hueco y de su velocidad de crecimiento relativa.

Una vez definidas todas las componentes de la velocidad de deformación microscópicas, se puede establecer una relación entre la velocidad de deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}$

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

y la velocidad de deformación macroscópica en la dirección longitudinal \dot{E}_3 ,

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}'_{ij} \dot{\varepsilon}'_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} [\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + \dot{\varepsilon}_z^2]} = \left((\dot{E}_3)^2 + \frac{4}{3} \frac{A^2}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definiendo un parámetro α , (4.16), que depende de la velocidad de crecimiento del volumen de hueco (debido a A) y de la velocidad de deformación longitudinal de la forma

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{|A|}{a^2 \dot{E}_3}, \quad (4.16)$$

se obtiene que

$$\dot{\varepsilon} = \dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Ahora, se puede representar la ley del flujo del material (4.4) para cada componente desviadora del tensor de tensiones microscópicas en función de velocidades de deformación macroscópicas.

$$\begin{aligned} \sigma'_r &= \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\dot{E}_3}{2} - \frac{A}{r^2} \right), \\ \sigma'_\theta &= \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\dot{E}_3}{2} + \frac{A}{r^2} \right), \\ \sigma'_z &= \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \dot{E}_3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

El siguiente paso es utilizar estas expresiones y aplicar las condiciones de contorno (4.5) con el fin de obtener una ecuación que relacione tensiones macroscópicas con velocidades de deformación macroscópicas, para formular la superficie de plastificación que describe el comportamiento de la celda con hueco. En primer lugar, teniendo en cuenta que $\sigma_r(b) = \Sigma_1$, $\sigma_r(a) = 0$ y $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma'_\theta - \sigma'_r$ se obtiene una expresión para la tensión macroscópica en el eje 1,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \sigma_r(b) - \sigma_r(a) &= \int_a^b \frac{d\sigma_r}{dr} dr = \int_a^b \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} dr \\ &= \int_a^b \frac{\sigma'_\theta - \sigma'_r}{r} dr = \int_a^b \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{2A}{r^3} dr. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por otro lado, considerando la definición de tensión macroscópica de la ecuación (4.6), se consigue otra expresión para la tensión macroscópica equivalente ($\Sigma_{eq} = \Sigma_3 - \Sigma_1$ si se

tiene en cuenta un estado de carga con $\Sigma_3 > \Sigma_1 = \Sigma_2$),

$$\begin{aligned}\Sigma_{eq} &= \Sigma_3 - \Sigma_1 = \Sigma_3 - \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{V} \int_V \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \sigma'_z - \frac{1}{2}(\sigma'_r + \sigma'_\theta) dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} r dr d\theta dz. \quad (4.20)\end{aligned}$$

Operando con las expresiones (4.19) y (4.20) se obtienen dos integrales que definen el comportamiento viscoplástico de la celda con hueco propuesta,

$$\Sigma_1 = \frac{4}{3} \int_a^b \frac{\bar{\sigma}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{A}{r^3} dr, \quad (4.21)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{2}{b^2} \int_a^b \frac{\bar{\sigma}}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} r dr. \quad (4.22)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (4.21) y (4.22), es necesario definir el límite elástico del material de la matriz ($\bar{\sigma}$). Debido al carácter analítico de este trabajo, se ha propuesto como objetivo utilizar una ley potencial del material que es función únicamente de la velocidad de deformación plástica equivalente. Por ello, el límite elástico empleado para el material de la matriz del cilindro se define como

$$\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0 \dot{\varepsilon}^m, \quad (4.23)$$

siendo σ_0 una constante del material y m el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación.

Dependiendo del valor del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m , el comportamiento de la matriz varía de manera significativa, por lo que se analizan las superficies de plastificación de la celda para los diferentes valores posibles:

- $m = 0$
- $m = 1$
- $0 < m < 1$

4.3.1 Coeficiente de endurecimiento por velocidad de deformación $m=0$

En primer lugar, se analiza el modelo de plastificación propuesto por Gurson et al. (1977), que corresponde a un valor del exponente m igual a 0 y un comportamiento plástico ideal del material, sin ninguna dependencia con la velocidad de deformación plástica equivalente.

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

En consecuencia, una vez alcanzada la zona plástica del material, la tensión equivalente en un punto se mantiene constante,

$$\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0 \dot{\varepsilon}^0 = \sigma_0. \quad (4.24)$$

Como se puede observar en la ecuación (4.24), el límite elástico del material ya no depende de la velocidad de deformación plástica equivalente y su valor es igual a una constante σ_0 . En consecuencia, las expresiones (4.21) y (4.22) toman la forma

$$\Sigma_1 = \frac{4\sigma_0}{3} \int_a^b \frac{A}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}} r^3} dr, \quad (4.25)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{2\sigma_0}{b^2} \int_a^b \frac{r}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}} dr. \quad (4.26)$$

Con el objetivo de poder resolver la integral de la ecuación (4.25) se realiza un cambio de variable

$$x = \alpha \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad dx = -2\alpha \frac{a^2}{r^3} dr,$$

donde los límites de integración varían a

$$r \rightarrow [a, b], \quad x \rightarrow [\alpha, f\alpha].$$

Entonces, teniendo en cuenta la definición de la constante A de la expresión (4.15) y el cambio de variable se obtiene

$$\Sigma_1 = \frac{4\sigma_0}{3} \int_a^b \frac{A}{\dot{E}_3 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} r^3} dr = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{f\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \left[\frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{f\alpha + \sqrt{1 + (f\alpha)^2}} \right]. \quad (4.27)$$

Ahora, ya se dispone de una expresión que relaciona la tensión macroscópica en el eje transversal con la porosidad f y con α . A continuación, se repite el mismo proceso con la ecuación (4.26) efectuando de nuevo el cambio de variable,

$$rdr = -\frac{r^4}{2a^2\alpha} dx = -\frac{a^2\alpha}{2} \frac{dx}{x^2},$$

y, por lo tanto, Σ_{eq} se puede definir como

$$\begin{aligned} \Sigma_{eq} &= \frac{2\sigma_0}{b^2} \int_a^b \frac{rdr}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2\sigma_0}{b^2}\right) \left(-\frac{\alpha a^2}{2}\right) \int_{\alpha}^{f\alpha} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} \\ &= f\alpha\sigma_0 \int_{f\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} = -f\alpha\sigma_0 \left[\sqrt{x^{-2} + 1} \right]_{f\alpha}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sustituyendo los límites de integración en la ecuación (4.28) se consigue relacionar la tensión macroscópica equivalente de la celda con α y la porosidad,

$$\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} = \sqrt{1 + f^2 \alpha^2} - f \sqrt{1 + \alpha^2}. \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta que la ley de plastificación del material (4.24) no depende de $\dot{\varepsilon}$, tiene que ser posible definir una superficie de plastificación de la celda que no tenga dependencia con α y, por lo tanto, que no sea función de la velocidad de deformación. En consecuencia, se procede a operar con las ecuaciones (4.27) y (4.29), obteniendo

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{3} \frac{\Sigma_{11}}{\sigma_0}, & C_2 &= \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}, \\ C_3 &= \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}, & C_4 &= f\alpha + \sqrt{1 + f^2 \alpha^2}, \end{aligned}$$

e introduciendo estos parámetros en las ecuaciones (4.27) y (4.29) se tiene

$$C_1 = \ln \left[\frac{C_3}{C_4} \right], \quad C_2 = C_4 - f C_3.$$

El siguiente objetivo es crear una relación entre C_1 y C_2 eliminando C_3 y C_4 , por lo que operando se obtiene

$$\begin{aligned} e^{C_1} &= \frac{C_3}{C_2 + f C_3}, \\ C_3 &= \frac{C_2 e^{C_1}}{1 - f e^{C_1}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$C_4 = C_2 + f \frac{C_2 e^{C_1}}{1 - f e^{C_1}} = \frac{C_2}{1 - f e^{C_1}}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} C_3^2 &= 2\alpha C_3 + 1, & C_4^2 &= 2f\alpha C_3 + 1, \\ 2\alpha &= \frac{C_3^2 - 1}{C_3} = \frac{C_4^2 - 1}{f C_4}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por lo tanto, utilizando las expresiones (4.30), (4.31) y (4.32) se puede conseguir la relación (4.33).

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{C_2 e^{C_1}}{1 - f e^{C_1}} \right)^2 - 1}{\frac{C_2 e^{C_1}}{1 - f e^{C_1}}} &= \frac{\left(\frac{C_2}{1 - f e^{C_1}} \right)^2 - 1}{\frac{f C_2}{1 - f e^{C_1}}}, \\ C_2^2 (f e^{2C_1} - e^{C_1}) &= (1 - f e^{C_1})^2 (f - e^{C_1}), \\ C_2^2 &= 1 + f^2 - 2f \cosh(C_1). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros C_1 y C_2 se obtiene una función de plastificación del cilindro con hueco cilíndrico para un material perfectamente plástico, la cual

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

es dependiente de la tensión macroscópica equivalente, la tensión macroscópica en el eje transversal, la porosidad y el límite elástico del material ($\bar{\sigma} = \sigma_0$),

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_1, \sigma_0, f) = \frac{(\Sigma_{eq})^2}{(\sigma_0)^2} + 2f \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_1}{\sigma_0}\right) - (1 + f^2) = 0. \quad (4.34)$$

Con ello, se consigue expresar de manera analítica el modelo propuesto por Gurson et al. (1977) como ley de plastificación, tal y como se puede comprobar comparando con la ecuación (3.9) (si se tiene en cuenta que $\Sigma_1 = \Sigma_{\alpha\alpha}/2$, donde $\Sigma_{\alpha\alpha}$ es la tensión hidrostática en el plano transversal). Por otra parte, también se puede comprobar que esta función cumple el criterio de Von Mises cuando la porosidad es nula ($\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} - 1 = 0$). En la Figura 4.3 se han representado las superficies de plastificación obtenidas analíticamente para $m = 0$, enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1, para diferentes valores de la porosidad f .

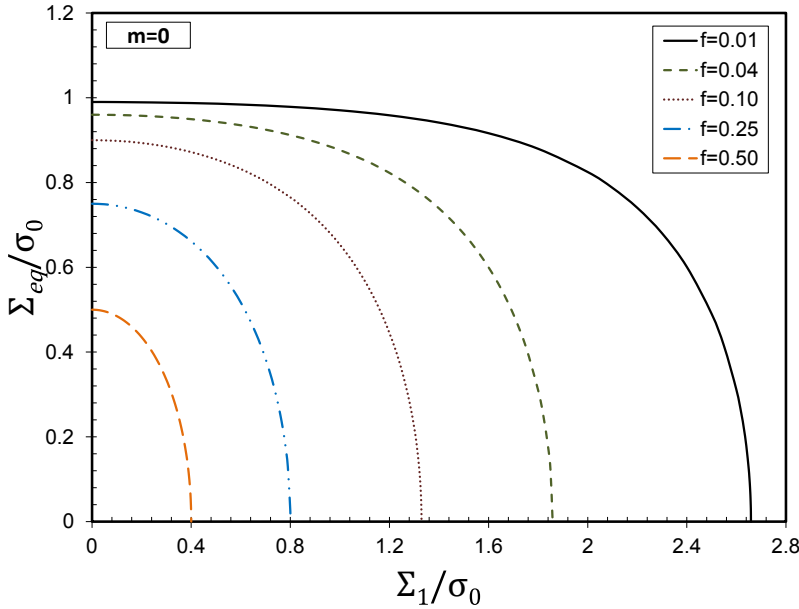


Fig. 4.3 Representación de las superficies de plastificación para huecos cilíndricos con $m=0$, para diferentes valores de la porosidad f

4.3.2 Coeficiente de endurecimiento por velocidad de deformación $m=1$

En este apartado se estudia el caso límite de un exponente de endurecimiento por velocidad de deformación igual a uno, que se corresponde con un comportamiento plástico con

dependencia lineal de la velocidad de deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\varepsilon}}$,

$$\bar{\sigma}(\dot{\bar{\varepsilon}}) = \sigma_0 \dot{\bar{\varepsilon}}^1 = \sigma_0 \dot{\bar{\varepsilon}}. \quad (4.35)$$

Con este modelo constitutivo, es posible resolver de manera analítica las integrales de las expresiones generales (4.21) y (4.22) que definen las tensiones macroscópicas aplicadas en la celda, las cuales toman la forma

$$\Sigma_1 = \frac{4}{3} \int_a^b \frac{\sigma_0 \dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{A}{r^3} dr, \quad (4.36)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{2}{b^2} \int_a^b \frac{\sigma_0 \dot{\bar{\varepsilon}}}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} r dr. \quad (4.37)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.17) que define la deformación plástica equivalente en función de α , el radio interior a y un radio arbitrario r , las expresiones (4.36) y (4.37) quedan simplificadas.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \Sigma_1 &= \frac{4}{3} \sigma_0 A \int_a^b \frac{dr}{r^3}, \\ \Sigma_{eq} &= \frac{2}{b^2} \sigma_0 \dot{E}_3 \int_a^b r dr, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde σ_0 , A y \dot{E}_3 son variables que no dependen de r y, por lo tanto, pueden salir de la integral. Como resultado se obtienen dos ecuaciones que se pueden resolver analíticamente dando lugar a

$$\Sigma_1 = \frac{4}{3} \sigma_0 A \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad (4.39)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{2}{b^2} \sigma_0 \dot{E}_3 \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right). \quad (4.40)$$

Del mismo modo, utilizando la definición del parámetro α de la ecuación (4.16), donde se obtiene que $A = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \alpha \dot{E}_3$, y la definición de la porosidad $f = (a/b)^2$, se pueden reescribir las ecuaciones (4.39) y (4.40) de manera que las tensiones macroscópicas únicamente tengan dependencia con α , la porosidad f , la velocidad de deformación longitudinal macroscópica \dot{E}_3 y la constante σ_0 ,

$$\Sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 \dot{E}_3 \alpha (1 - f), \quad (4.41)$$

$$\Sigma_{eq} = \sigma_0 \dot{E}_3 (1 - f). \quad (4.42)$$

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

A continuación, se pretende encontrar la relación existente entre la velocidad de deformación en el eje longitudinal \dot{E}_3 y la velocidad de deformación equivalente macroscópica \dot{E}_{eq} , con el objeto de expresar las relaciones (4.41) y (4.42) en función del invariante de deformación macroscópica \dot{E}_{eq} .

El volumen de la matriz, $V_m = \pi H(b^2 - a^2)$, es constante en el tiempo dada la condición de incompresibilidad de la matriz (4.3). En consecuencia, la primera derivada respecto del tiempo de V_m tiene que ser igual a cero, obteniendo la siguiente expresión:

$$\pi \dot{H}(b^2 - a^2) + \pi H(2b\dot{b} - 2a\dot{a}) = 0, \quad (4.43)$$

y dividiéndola entre $\pi H b^2$ se obtiene

$$\frac{\dot{H}}{H} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) + 2 \frac{\dot{b}}{b} - 2 \frac{a^2}{b^2} \frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición de la porosidad $f = a^2/b^2$ y las definiciones de las velocidades de deformación se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r|_a &= \frac{\dot{a}}{a}, & \dot{\epsilon}_r|_b &= \frac{\dot{b}}{b}, & \dot{E}_3 &= \frac{\dot{H}}{H}, \\ 2 \dot{\epsilon}_r|_a &= \frac{2}{f} \dot{\epsilon}_r|_b + \frac{(1-f)}{f} \dot{E}_3. \end{aligned} \quad (4.44)$$

La expresión (4.44) consigue relacionar la velocidad de deformación microscópica en la superficie libre del interior del cilindro con las velocidades de deformación macroscópicas en los ejes 1 y 3, ya que $\dot{\epsilon}_r|_b = \dot{E}_1$. Por lo que, si se combina con la definición de la velocidad de crecimiento relativa del hueco (4.14) se obtiene

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{2}{f} \dot{\epsilon}_r|_b + \frac{(1-f)}{f} \dot{E}_3 + \dot{E}_3 = \frac{2}{f} \dot{E}_1 + \dot{E}_3.$$

A su vez, se puede sustituir la velocidad de crecimiento relativa del hueco ($\dot{\Omega}/\Omega$) utilizando las definiciones del parámetro α (4.16) y de la constante A (4.15), consiguiendo una expresión de la velocidad de deformación macroscópica en el eje 1 (\dot{E}_1) que depende de α , f y \dot{E}_3 ,

$$\dot{E}_1 = \frac{1}{2} \dot{E}_3 \left(\sqrt{3} f \alpha - 1 \right). \quad (4.45)$$

Ahora, mediante la ecuación que define la velocidad de deformación macroscópica equivalente en el cilindro axisimétrico ($\dot{E}_{eq} = \frac{2}{3}(\dot{E}_3 - \dot{E}_1)$) y mediante (4.45), es posible conseguir la relación deseada entre las velocidades de deformación macroscópicas longitudinal y equivalente.

$$\dot{E}_{eq} = \dot{E}_3 \left(1 - \frac{f\alpha}{\sqrt{3}} \right). \quad (4.46)$$

Con ello, se pueden escribir las ecuaciones (4.41) y (4.42) que relacionan las tensiones macroscópicas en la celda con la velocidad de deformación macroscópica equivalente,

$$\Sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 \dot{E}_{eq} \alpha \left(\frac{1-f}{1-\frac{f\alpha}{\sqrt{3}}} \right), \quad (4.47)$$

$$\Sigma_{eq} = \sigma_0 \dot{E}_{eq} \left(\frac{1-f}{1-\frac{f\alpha}{\sqrt{3}}} \right). \quad (4.48)$$

Sin embargo, para obtener la superficie de plastificación que se ha propuesto como objetivo, la cual es dependiente del estado tensional macroscópico de la celda, del límite elástico y de la porosidad, es necesario que desaparezca la dependencia con α . Utilizando las expresiones (4.47) y (4.48) como un sistema de ecuaciones, se obtiene la relación

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\Sigma_1}{\Sigma_{eq}}, \quad (4.49)$$

lo que indica que el parámetro α tiene una dependencia directa con la triaxialidad del estado tensional del cilindro ($T = \Sigma_h/\Sigma_{eq}$). Introduciendo la nueva definición de α de la expresión (4.49) en la ecuación (4.48) y operando consecuentemente se consigue finalmente relacionar las tensiones macroscópicas.

$$\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0 \dot{E}_{eq}} = (1-f) + f \frac{\Sigma_1}{\sigma_0 \dot{E}_{eq}}. \quad (4.50)$$

Por lo tanto, se consigue una superficie de plastificación obtenida de forma analítica, para una celda de un material poroso con comportamiento plástico con endurecimiento lineal por velocidad de deformación, la cual es función de la tensión macroscópica equivalente, la tensión macroscópica en el eje 1 (que está relacionada con la tensión hidrostática), la velocidad de deformación equivalente macroscópica y la porosidad.

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_1, \dot{E}_{eq}, f) = \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0 \dot{E}_{eq}} - f \frac{\Sigma_1}{\sigma_0 \dot{E}_{eq}} - (1-f) = 0. \quad (4.51)$$

Asimismo, y al igual que en el modelo de material rígido perfectamente plástico, esta superficie de plastificación cumple que $\Sigma_{eq} = \bar{\sigma}$ cuando la porosidad f es nula, recuperando el criterio de Von Mises, dado que $\sigma_0 \dot{E}_{eq}$ es igual, en este caso, al límite elástico del material $\bar{\sigma} = \sigma_0 \dot{\epsilon}$ (ver Anexo A). En la Figura 4.4 se han representado las superficies de plastificación obtenidas analíticamente para $m = 1$, enfrentando los valores adimensionalizados de la tensión macroscópica equivalente y la tensión macroscópica en el eje 1, para diferentes valores de la porosidad f , acotando las curvas con los valores límites de f (0 y 1).

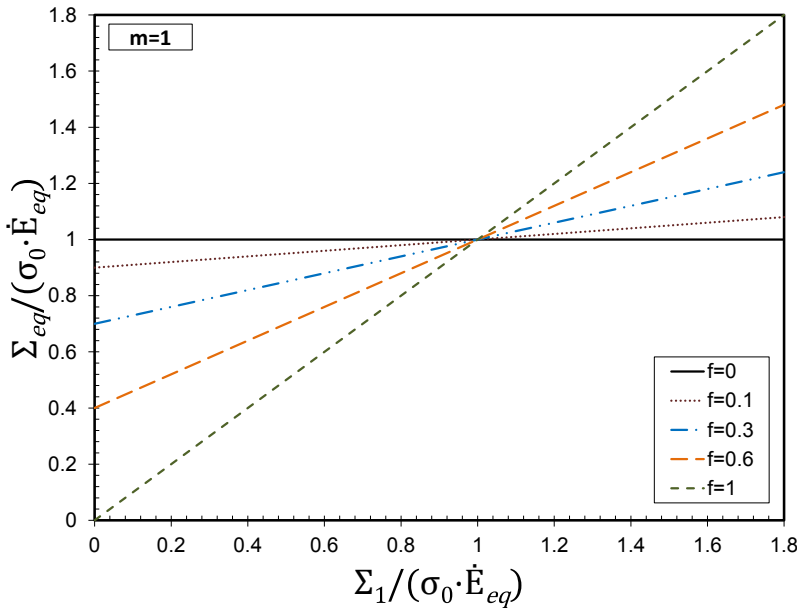


Fig. 4.4 Representación de las superficies de plastificación para huecos cilíndricos con $m=1$, para diferentes valores de la porosidad f , incluyendo los valores límite correspondientes a $f=0$ y $f=1$

4.3.3 Coeficiente de endurecimiento por velocidad de deformación $0 < m < 1$

En este apartado se analiza el caso de un exponente m con un valor entre 0 y 1, por lo que tiene un endurecimiento plástico por velocidad de deformación potencial y sigue la ley generalizada expuesta en la ecuación (4.23). Debido a ello, las expresiones generales (4.21) y (4.22) que definen las tensiones macroscópicas aplicadas en la celda tienen la forma

$$\Sigma_1 = \frac{4}{3} \int_a^b \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}^m}{\dot{\epsilon}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{A}{r^3} dr, \quad (4.52)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{2}{b^2} \int_a^b \frac{\sigma_0 \dot{\epsilon}^m}{\left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}}} r dr. \quad (4.53)$$

Para intentar resolver las integrales de las ecuaciones (4.52) y (4.53) se procede a hacer el cambio de variable

$$x = \alpha \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad dx = -2\alpha \frac{a^2}{r^3} dr,$$

$$r dr = -\frac{r^4}{2a^2\alpha} dx = -\frac{a^2\alpha}{2} \frac{dx}{x^2},$$

donde

$$r \rightarrow [a, b], \quad x \rightarrow [\alpha, f\alpha].$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.17) que define velocidad de deformación plástica equivalente, el cambio de variable definido y el valor de la constante A de la expresión (4.15), se obtiene que

$$\dot{\varepsilon} = \dot{E}_3 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} = \dot{E}_3 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 \dot{E}_3^m \int_{f\alpha}^{\alpha} (1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}} dx, \quad (4.54)$$

$$\Sigma_{eq} = \sigma_0 \dot{E}_3^m f\alpha \int_{f\alpha}^{\alpha} \frac{(1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}}}{x^2} dx. \quad (4.55)$$

Por otra parte, se puede sustituir la dependencia con la velocidad macroscópica longitudinal (\dot{E}_3) de las ecuaciones (4.54) y (4.55) por una dependencia con la velocidad de deformación macroscópica equivalente (\dot{E}_{eq}), utilizando la relación obtenida en la expresión (4.46), al igual que en el apartado anterior.

$$\Sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}^m}{\left(1 - \frac{f\alpha}{\sqrt{3}}\right)^m} \int_{f\alpha}^{\alpha} (1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}} dx, \quad (4.56)$$

$$\Sigma_{eq} = f\alpha \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}^m}{\left(1 - \frac{f\alpha}{\sqrt{3}}\right)^m} \int_{f\alpha}^{\alpha} \frac{(1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}}}{x^2} dx. \quad (4.57)$$

En consecuencia, se dispone de dos expresiones que relacionan la tensiones macroscópicas en el eje 1 y equivalente, con la porosidad f , con α y con la velocidad de deformación macroscópica equivalente \dot{E}_{eq} . Se han analizado las ecuaciones (4.56) y (4.57) mediante la resolución numérica de las integrales que aparecen con el software comercial Wolfram Mathematica. Gracias a ello, se pueden obtener las superficies de plastificación correspondientes para diferentes valores del exponente m y diferentes porosidades. En la Figura 4.5 se puede ver una representación gráfica de dichas superficies de plastificación, donde se enfrentan las expresiones normalizadas de la tensión macroscópica en el eje 1 y la tensión macroscópica equivalente.

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

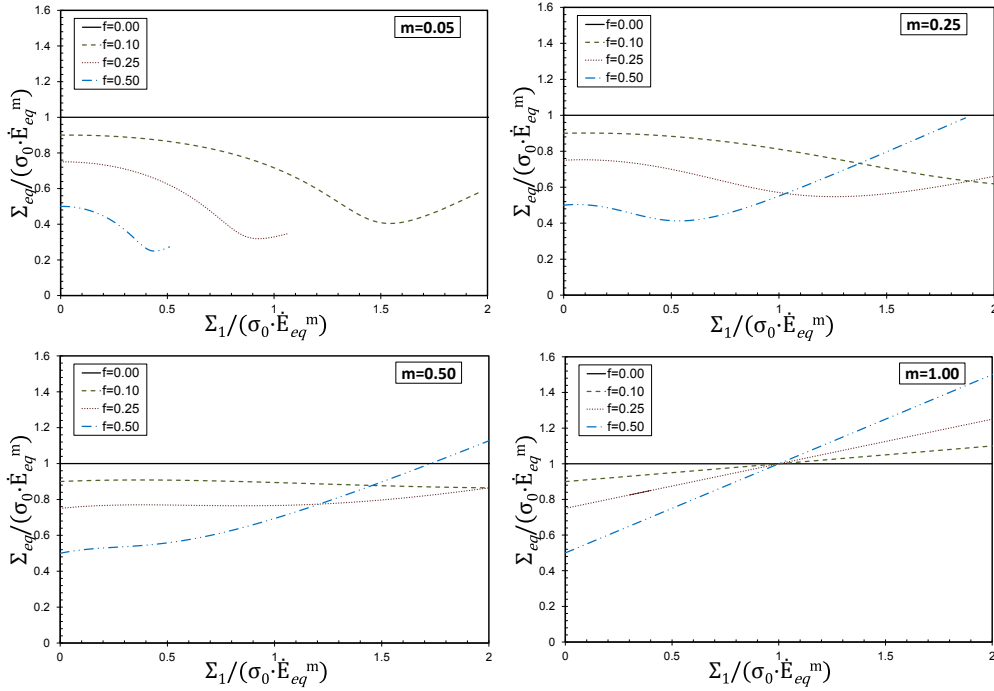


Fig. 4.5 Representación de las superficies de plastificación exactas para huecos cilíndricos (obtenidas mediante cálculo numérico), para diferentes valores de la porosidad f y del exponente m

Los resultados muestran un importante efecto del exponente m en las superficies de plastificación, siendo su valor más elevado cuando m crece. Cabe destacar que la pérdida de convexidad que se produce en las curvas es debida a la adimensionalización realizada con el término $\sigma_0 (\dot{E}_{eq})^m$, que divide a Σ_1 y Σ_{eq} . La superficie de plastificación realmente mantiene la convexidad. También se puede apreciar que los resultados obtenidos para $m = 1$ coinciden con los obtenidos de manera analítica en el apartado anterior, presentando una relación lineal entre las dos tensiones macroscópicas.

Para valores del exponente de endurecimiento m distintos de 0 y 1, las integrales de las ecuaciones (4.56) y (4.57) no tienen resolución analítica exacta. Debido a ello, en la presente tesis doctoral se proponen diferentes aproximaciones con el objetivo de obtener un criterio de plastificación analítico preciso y que no requiera de cálculos complejos, para materiales sensibles a la velocidad de deformación.

4.4 Aproximación analítica de la función de plastificación

Con el objetivo de extender el modelo de plastificación propuesto por Gurson et al. (1977) a materiales con dependencia de la velocidad de deformación, en esta sección se exploran nuevas aproximaciones analíticas para obtener una expresión cerrada de una función de plastificación para materiales con dependencia potencial de la velocidad de deformación plástica equivalente.

Se ha fijado un rango de trabajo en el que las diferentes asunciones matemáticas que se van a desarrollar sean válidas, con el fin de que el modelo sea lo más preciso posible. Se tiene en cuenta un amplio rango de triaxialidades, desde $T = 0$ hasta $T = 3$. Por otra parte, las porosidades y los exponentes de endurecimiento por velocidad de deformación cubren los intervalos $0 \leq f \leq 0.3$ y $0 \leq m \leq 0.1$, respectivamente. Los valores de trabajo empleados están pensados para satisfacer un amplio rango de aplicación de metales dúctiles con sensibilidad a la velocidad de deformación.

En primer lugar, se definen las funciones $G(m)$ y $H(m)$ como las integrales de las ecuaciones (4.56) y (4.57), sin solución exacta para valores de m distintos de 0 y 1.

$$G(m) = \int_{f \cdot \alpha}^{\alpha} (1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}}, \quad (4.58)$$

$$H(m) = \int_{f \cdot \alpha}^{\alpha} \frac{(1 + x^2)^{\frac{m-1}{2}}}{x^2}. \quad (4.59)$$

El valor del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación se considera lo suficientemente pequeño ($0 < m < 0.1$) como para poder realizar una expansión en series de Taylor en torno a $m = 0$ de las integrales (4.58) y (4.59). Por simplicidad de la solución, se ha decidido considerar únicamente una aproximación de primer orden de las series.

$$G(m) = G(0) + m G'(0) + R_G, \quad (4.60)$$

$$H(m) = H(0) + m H'(0) + R_H, \quad (4.61)$$

donde los errores de truncamiento R_G y R_H se definen como

$$R_G = \frac{G''(x_1)}{2!} m^2, \quad R_H = \frac{H''(x_2)}{2!} m^2, \quad (4.62)$$

para cualquier x_1 y x_2 comprendido entre 0 y m , cumpliéndose en todo momento (se ha demostrado numéricamente) que $|R_G| < 0.128$ y $|R_H| < 0.002$.

A fin de corroborar la validez de la aproximación realizada en las ecuaciones (4.60) y (4.61), se representa en la Figura 4.6 la evolución de $G(m)$ y $G(0)$ en función de α para un valor de $m = 0.1$ y porosidades $f = 0.01$ y $f = 0.1$, y a su vez, en la Figura 4.7 se

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

realiza una idéntica representación pero, en este caso, para las funciones $H(m)$ y $H(0)$. En las gráficas se ha tenido en cuenta un rango de valores de α en el eje de abscisas con el objetivo de cubrir el intervalo de triaxialidades $0 \leq T \leq 3$ para los casos de m y f analizados.

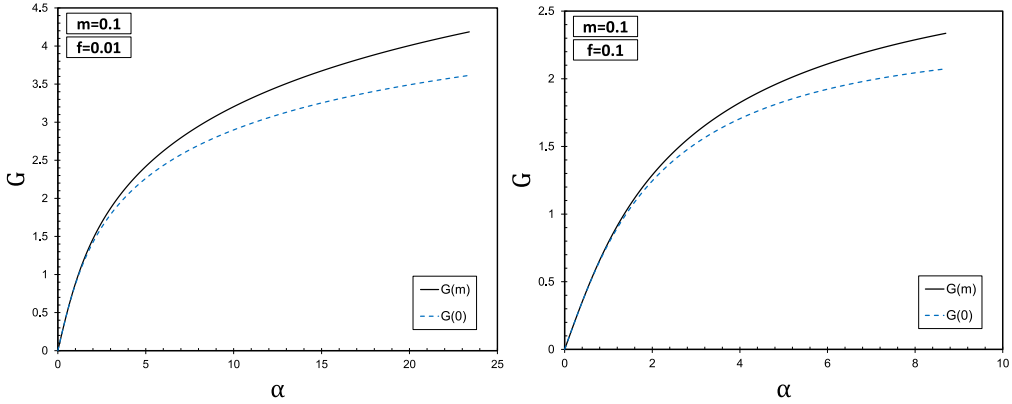


Fig. 4.6 Variación de $G(m)$ y $G(0)$ frente a α para un valor del exponente de endurecimiento $m = 0.1$ y valores de porosidad $f = 0.01$ y $f = 0.1$

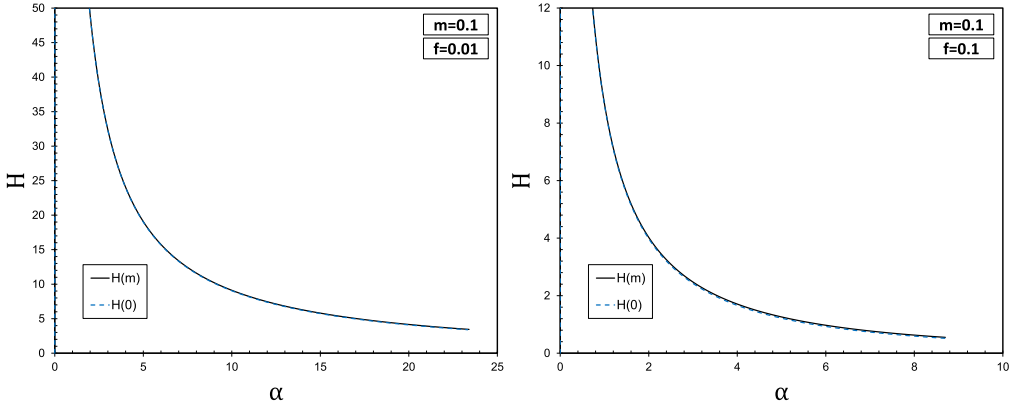


Fig. 4.7 Variación de $H(m)$ y $H(0)$ frente a α para un valor del exponente de endurecimiento $m = 0.1$ y valores de porosidad $f = 0.01$ y $f = 0.1$

De las Figuras 4.6 y 4.7 se puede obtener la conclusión de que, para los valores de porosidad, triaxialidad y exponente de endurecimiento analizados, se cumple que

$$|mG'(0) + R_G| \gg |mH'(0) + R_H| \quad \text{con} \quad |mH'(0) + R_H| < 0.074.$$

Debido a ello, se puede simplificar el término $mH'(0)$ de la expansión en series de Taylor de la ecuación (4.61), por lo que las ecuaciones de $G(m)$ y $H(m)$ se expresarían como

$$G(m) = G(0) + mG'(0) \quad \text{y} \quad H(m) = H(0), \quad (4.63)$$

siendo las funciones $G(0)$ y $H(0)$ las soluciones para el caso de $m = 0$ (modelo de plastificación propuesto por Gurson). Estas funciones tienen solución analítica dependiente de f y α ,

$$G(0) = \ln \left[\frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{f\alpha + \sqrt{1 + (f\alpha)^2}} \right], \quad H(0) = \frac{\sqrt{1 + f^2\alpha^2} - f\sqrt{1 + \alpha^2}}{f\alpha}. \quad (4.64)$$

Por otro lado, se tiene que la función $G'(0)$ es una integral dependiente de f y α que tampoco dispone de solución analítica,

$$G'(0) = \frac{1}{2} \int_{f\alpha}^{\alpha} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(1 + x^2) dx. \quad (4.65)$$

4.4.1 Primera propuesta de función de plastificación

El siguiente paso en la aproximación se basa en la hipótesis de que, para las porosidades y triaxialidades analizadas en este trabajo, el término $(1 - f\alpha/\sqrt{3})$ es aproximadamente igual a uno, debido a que $f\alpha \ll \sqrt{3}$ en el rango de valores analizados. Si se tiene en cuenta la ecuación (4.46), la hipótesis anterior permite escribir la igualdad $\dot{E}_3 = \dot{E}_{eq}$. En consecuencia, considerando también la asunción propuesta en las ecuaciones (4.63), las expresiones (4.56) y (4.57) se pueden reescribir como

$$\frac{\Sigma_1}{\bar{\sigma}_0 \dot{E}_{eq}^m} = \frac{\sqrt{3}}{3} (G(0) + mG'(0)), \quad (4.66)$$

$$\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_0 \dot{E}_{eq}^m} = f \cdot \alpha \cdot H(0). \quad (4.67)$$

Por otra parte, definiendo las tensiones macroscópicas adimensionales

$$\hat{\Sigma}_1 = \frac{\Sigma_1}{\bar{\sigma}_0 \dot{E}_{eq}^m}, \quad \hat{\Sigma}_{eq} = \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_0 \dot{E}_{eq}^m}, \quad (4.68)$$

y siguiendo el mismo procedimiento que en los apartados anteriores para valores de $m = 0$ y $m = 1$, la primera aproximación propuesta de superficie de plastificación para materiales porosos dependientes de la velocidad de deformación puede ser escrita como

$$\Phi(\hat{\Sigma}_{eq}, \hat{\Sigma}_1, f, G'(0), m) = \left(\hat{\Sigma}_{eq}\right)^2 + 2f \cosh\left(\sqrt{3}\hat{\Sigma}_1 - mG'(0)\right) - (1 + f^2) = 0. \quad (4.69)$$

En consecuencia, ahora el objetivo es conseguir una aproximación de $G'(0)$ a través de una función simple y precisa, que permita definir Φ únicamente en términos de las variables f , m , Σ_1 y Σ_{eq} .

Para empezar, se ha representado en la Figura 4.8 la evolución de la integral $G'(0)$ en función del parámetro α para diferentes valores de porosidad ($f=0, 0.05, 0.1$ y 0.3), donde

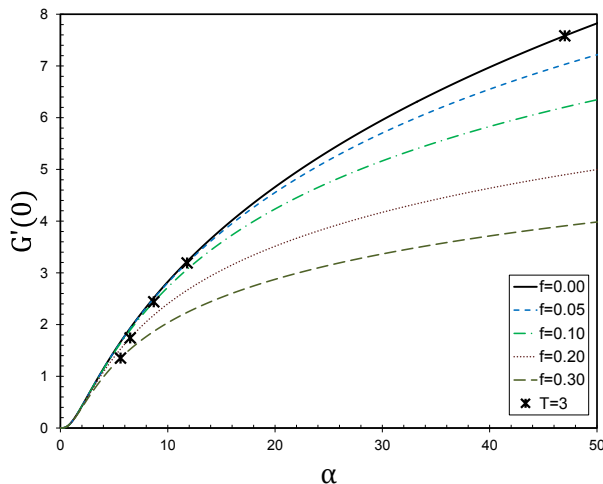


Fig. 4.8 Evolución de la función $G'(0)$ frente a α para $f=0, 0.05, 0.1$ y 0.3

en cada curva se ha dibujado con un asterisco el punto correspondiente al valor límite superior de triaxialidad empleado en este trabajo ($T = 3$). En el rango de porosidades analizado ($0 \leq f \leq 0.3$), si se compara la curva de $G'(0)$ para el caso de referencia ($f = 0$) con las correspondientes al resto de porosidades, se puede apreciar que la diferencia no es muy significativa y no supera el 18.7% en el peor de los casos. Por ello, es posible asumir que la aproximación de la integral $G'(0)$ sea un ajuste que dependa exclusivamente de α y se base en la curva correspondiente a $f = 0$. En consecuencia, y con el fin de conseguir una función de aproximación de $G'(0)$ lo suficientemente sencilla, se utiliza el ajuste logarítmico

$$G'_{0 \text{ Fitted}} = A_1 \log_{10} \left(\frac{\alpha}{A_2} + 1 \right), \quad (4.70)$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes del ajuste, el cual es válido para el rango de triaxialidades estudiado ($0 \leq T \leq 3$) (Figura 4.9). Los valores de estas constantes se han obtenido mediante el método de los mínimos cuadrados ($A_1 = 10.56$ y $A_2 = 11.50$).

Sin embargo, para obtener una superficie de plastificación que dependa únicamente de las variables f , m , Σ_1 y Σ_{eq} , hay que suprimir la dependencia con α de la aproximación realizada en la ecuación (4.70). Para ello, se ha utilizado la expresión de la tensión equivalente adimensional de la ecuación (4.67), aproximando el término $f\alpha H(0)$ mediante la función lineal (ver Figura 4.10)

$$\hat{\Sigma}_{eq} = (1 - f) - B(f)\alpha, \quad (4.71)$$

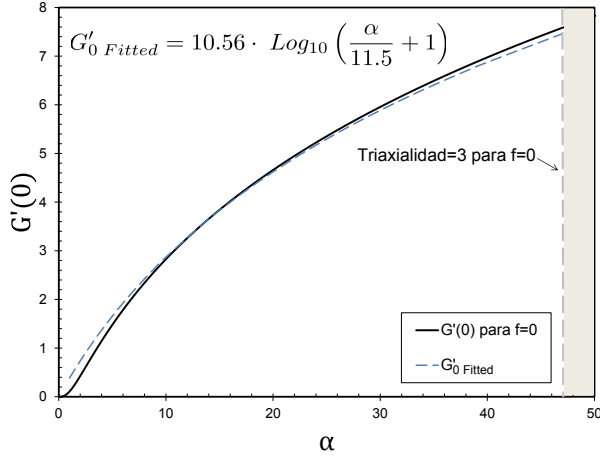


Fig. 4.9 Comparación de $G'(0)$ para $f=0$ y $G'_0 Fitted$ frente a α

lo que permite expresar α como una función dependiente de $\hat{\Sigma}_{eq}$ y f sin prácticamente perder precisión en el rango de triaxialidades $0 \leq T \leq 3$,

$$\alpha_{Fitted} = \frac{1 - f - \hat{\Sigma}_{eq}}{B(f)}. \quad (4.72)$$

El término $B(f)$ se ha ajustado teniendo en cuenta el rango de porosidades utilizado en este trabajo ($0 \leq f \leq 0.3$), obteniendo un valor de B óptimo para cada f estudiada (Tabla 4.1). Además, en la Figura (4.10) se pueden apreciar dos ejemplos del buen ajuste que se produce entre la función $f\alpha H(0)$ y las aproximaciones lineales realizadas con los valores óptimos de B en dos porosidades distintas.

Tabla 4.1 Valores óptimos de B para cada porosidad

f	0	0.001	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1	0.2	0.3
B	0.000	0.001	0.008	0.019	0.032	0.046	0.052	0.079	0.087

Finalmente, con el fin de obtener una función continua del parámetro $B(f)$ de la ecuación (4.71), se propone el ajuste polinómico de segundo grado

$$B(f) = B_1 f + B_2 f^2, \quad (4.73)$$

el cual ha sido calibrado mediante los valores discretos de B de la Tabla 4.1, donde las constantes obtenidas en la interpolación son $B_1 = 0.63$ y $B_2 = -1.17$. En la Figura 4.11 se puede ver resultado del ajuste polinómico realizado.

En resumen de todo el procedimiento anterior, la primera expresión cerrada propuesta para una función de plastificación para materiales porosos dependientes de la velocidad

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

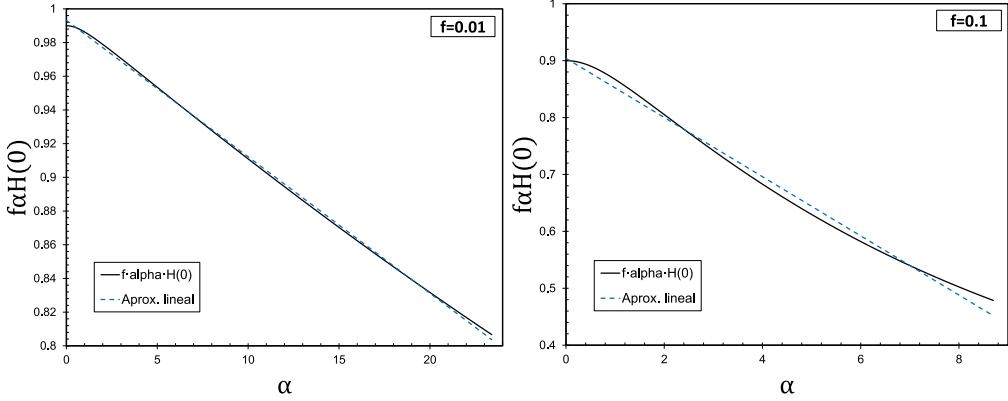


Fig. 4.10 Comparación de la curva $f\alpha H(0)$ y los ajustes lineales realizados frente a α , para $f = 0.01$ con $B = 0.008$ y $f = 0.1$ con $B = 0.052$

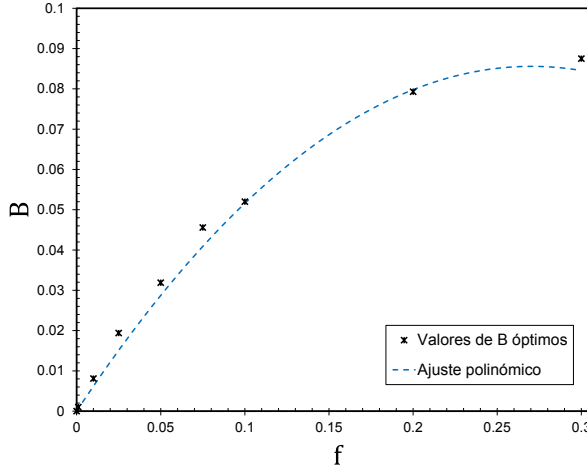


Fig. 4.11 Ajuste polinómico de segundo grado para la función $B(f)$

de deformación puede ser escrita como

$$\Phi\left(\widehat{\Sigma}_{eq}, \widehat{\Sigma}_1, f, m\right) = \left(\widehat{\Sigma}_{eq}\right)^2 + 2f \cosh\left(\sqrt{3}\widehat{\Sigma}_1 - mG'(0)_{Fitted}\right) - (1 + f^2) = 0, \quad (4.74)$$

con

$$G'_{0 \text{ Fitted}} = A_1 \log_{10}\left(\frac{\alpha_{Fitted}}{A_2} + 1\right), \quad \alpha_{Fitted} = \frac{1 - f - \widehat{\Sigma}_{eq}}{B_1 f + B_2 f^2} \quad (4.75)$$

y las cuatro constantes del ajuste, que son totalmente independientes del material,

$$A_1 = 10.56, \quad A_2 = 11.50, \quad B_1 = 0.63 \quad \text{y} \quad B_2 = -1.17. \quad (4.76)$$

Cabe destacar que, para un valor del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación $m = 0$, se recupera la expresión original del modelo de Gurson y que coincide con la resolución analítica del apartado 4.3.1.

4.4.2 Segunda propuesta de función de plastificación

Con el objetivo de mejorar la primera superficie de plastificación presentada, en esta ocasión no se considera la hipótesis de que $1 - \frac{f\alpha}{\sqrt{3}} \approx 1$. Gracias a ello, la aproximación realizada es más precisa y, utilizando la definición de α_{Fitted} dada en la ecuación (4.75), se obtiene un factor K_F que se define como

$$K_F = 1 - \frac{f\alpha_{Fitted}}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1 - f - \hat{\Sigma}_{eq}}{\sqrt{3}(B_1 + B_2f)}. \quad (4.77)$$

Asimismo, se puede simplificar la relación entre las deformaciones macroscópicas equivalente y longitudinal de la ecuación (4.46) utilizando el mismo factor K_F ,

$$\dot{E}_{eq} = \dot{E}_3 \left(1 - \frac{1 - f - \hat{\Sigma}_{eq}}{\sqrt{3}(B_1 + B_2f)} \right) = \dot{E}_3 K_F. \quad (4.78)$$

La nueva proposición permite definir una nueva expresión más precisa de una función de plastificación para materiales porosos dependientes de la velocidad de deformación,

$$\Phi(\hat{\Sigma}_{eq}, \hat{\Sigma}_1, f, m) = \left((K_F)^m \hat{\Sigma}_{eq} \right)^2 + 2f \cosh \left(\sqrt{3} (K_F)^m \hat{\Sigma}_1 - mG'(0) \right) - (1 + f^2) = 0, \quad (4.79)$$

con

$$G'(0) = A_1 \log_{10} \left(\frac{1 - f - \hat{\Sigma}_{eq}}{A_2(B_1f + B_2f^2)} + 1 \right), \quad K_F = \left(1 - \frac{1 - f - \hat{\Sigma}_{eq}}{\sqrt{3}(B_1 + B_2f)} \right)$$

y las cuatro constantes del ajuste, que son independientes del material,

$$A_1 = 10.56, \quad A_2 = 11.50, \quad B_1 = 0.63 \quad \text{y} \quad B_2 = -1.17.$$

De nuevo, cabe destacar que, para un valor del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación $m = 0$, se recupera la expresión original del modelo de Gurson coincidente con la resolución analítica del apartado 4.3.1.

4.5 Validación de las funciones de plastificación

En este apartado se presentan diversas validaciones de las superficies de plastificación para materiales viscoplásticos con poros cilíndricos propuestas en esta tesis doctoral (ecuaciones (4.74) y (4.79)). En primer lugar, se comparan dichas funciones con la

solución numérica de las integrales de las ecuaciones (4.56) y (4.57), que se podría considerar como la solución "exacta" de la función de plastificación. Con ello, se pretende comprobar la precisión de las aproximaciones realizadas.

En segundo lugar, con el fin de comprobar la mejora que puede suponer el uso de las superficies de plastificación presentadas, se hace una comparación con una metodología que se emplea de manera extendida, que consiste en la utilización de la función de plastificación original de Gurson introduciendo la dependencia con la velocidad de deformación reemplazando directamente σ_0 en la ecuación (3.9) por el límite elástico del material $\bar{\sigma}$. Para realizar la validación, se utiliza un modelo numérico en un código comercial de elementos finitos donde se utiliza el modelo constitutivo citado mediante una subrutina de usuario UMAT.

Por último, también se realiza una validación comparando la segunda superficie de plastificación presentada con otros modelos viscoplásticos de materiales porosos de la literatura. En concreto, con un modelo notablemente más complejo elaborado por Leblond et al. (1994b).

4.5.1 Comparación con la solución numérica de las integrales

Con el fin de comprobar la validez de los modelos de plastificación propuestos en el apartado 4.4, estos se comparan con la resolución de las ecuaciones integrales (4.56) y (4.57) mediante el software comercial de cálculo Wolfram Mathematica. A su vez, se realiza un análisis de los resultados obtenidos para cada una de las funciones de plastificación propuestas.

Primera aproximación. Los resultados obtenidos de la función de plastificación para un material viscoplástico poroso, de acuerdo con la primera propuesta presentada, se muestran en la Figura 4.12, en el espacio $\hat{\Sigma}_1$ - $\hat{\Sigma}_{eq}$, para valores de porosidad de $f = 0.01$, $f = 0.05$ y $f = 0.1$ y para $m = 0.01$ (a), $m = 0.05$ (c) y $m = 0.1$ (e). A su vez, se representan las soluciones "exactas" de las superficies de plastificación obtenidas numéricamente y se establece un límite de triaxialidad $T = 3$. Como se puede ver para el valor de $m = 0.01$, ambas superficies de plastificación prácticamente coinciden para todas las porosidades y en todo en el rango de tensión estudiado. Sin embargo, al incrementar el valor de m , la diferencia entre ambas curvas crece proporcionalmente al valor de f , quedando siempre por debajo la aproximación realizada de la superficie de plastificación. Por lo tanto, se puede decir que la primera aproximación presentada de la función de plastificación tiene mayor precisión para valores de m pequeños, teniendo en cuenta que para $m = 0$ se recupera la misma solución que resolviendo de manera analítica las integrales del apartado 4.3.1.

Segunda aproximación. En este caso, los resultados muestran, en las Figuras 4.12 (b), (d) y (f), que la segunda función de plastificación propuesta coincide con la solución exacta para $m = 0.01$ y sufre una ligera pérdida de precisión en los casos de $m = 0.05$ y $m = 0.1$, cuando la triaxialidad es cercana al valor máximo ($T = 3$). Asimismo, se

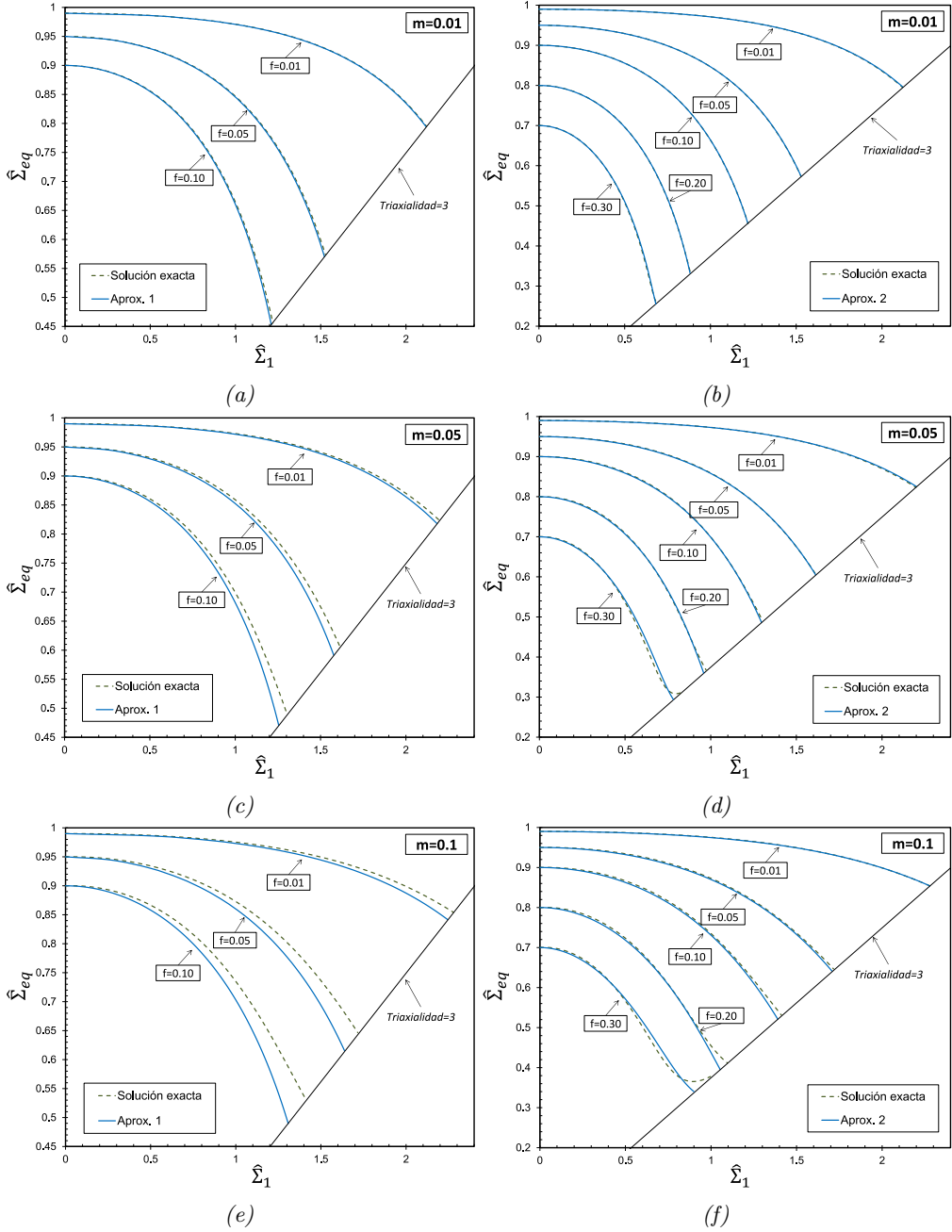


Fig. 4.12 Comparación de los modelos propuestos con la relación exacta $\hat{\Sigma}_1$ - $\hat{\Sigma}_{eq}$, teniendo en cuenta la primera aproximación en (a), (c) y (e), y la segunda aproximación en (b), (d) y (f), para diferentes valores de f y m

puede ver que para los valores más pequeños de porosidad, la precisión de la función de plastificación presentada es prácticamente independiente del valor de m . En consecuencia,

se puede decir que esta superficie de plastificación, que tiene en cuenta el segundo método de aproximación propuesto, reproduce de manera satisfactoria el comportamiento de un material poroso con dependencia de la velocidad de deformación para un rango de porosidad $0 \leq f \leq 0.3$ y triaxialidad $0 \leq T \leq 3$, recuperando, para $m = 0$, la solución analítica presentada en el apartado 4.3.1.

4.5.2 Comparación con el modelo clásico de Gurson

El modelo clásico de Gurson tiene en cuenta la existencia y el crecimiento de la porosidad en un material con un comportamiento perfectamente plástico, con total independencia de la deformación plástica o la velocidad de deformación plástica equivalente. Para materiales con dependencia de la velocidad de deformación plástica, usualmente no se modifica la superficie de plastificación y se introduce directamente dicha dependencia sustituyendo la constante del material σ_0 por el límite elástico de la matriz $\bar{\sigma}$. Sin embargo, esta asunción tiene poco sentido físico y, por lo tanto, puede no resultar válida.

Con el objetivo de comprobar los modelos de plastificación propuestos en el apartado 4.4, se hace un análisis de los resultados teóricos obtenidos mediante un estudio numérico de celda unitaria donde se implementa la modificación heurística del modelo clásico de Gurson para materiales con dependencia de la velocidad de deformación.

Modelo de celda e implementación numérica

Se han realizado diversas simulaciones numéricas mediante el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014). La celda se compone de un elemento representativo que consiste en un cilindro homogéneo cuya altura inicial es $2H_0$ y un radio inicial $R_0 = H_0/2$. Debido a la condición de simetría en la sección transversal media del cilindro ($z = 0$), solo se estudia la mitad del modelo, correspondiente a $z \geq 0$.

A su vez, se tiene una axisimetría en el modelo, en torno al eje z , por lo que éste puede ser simplificado, de tal manera que únicamente se realiza el cálculo en la superficie de revolución que compondría el cilindro completo. Gracias a ello, el problema tridimensional de la celda cilíndrica se convierte en un problema bidimensional axisimétrico, reduciendo el coste computacional. En consecuencia, se tiene que el mallado del modelo está compuesto por 50 elementos axisimétricos rectangulares de ocho nodos con integración reducida (CAX8R), distribuidos de forma estructurada (Figura 4.13).

Con el objetivo de imponer un estado tensional controlado en la celda durante todo el proceso de carga, se establecen unas condiciones de contorno mediante un método de control de desplazamiento en las caras externas de la celda, lo cual evita problemas de convergencia debido a la pérdida de rigidez en los elementos. Asimismo, este procedimiento numérico, desarrollado por Faleskog et al. (1998), permite mantener un estado macroscópico de triaxialidad tensional ($T = \Sigma_h/\Sigma_{eq}$) constante durante todo el proceso de carga. Esta herramienta ha sido usada por diferentes autores (Kim et al.,

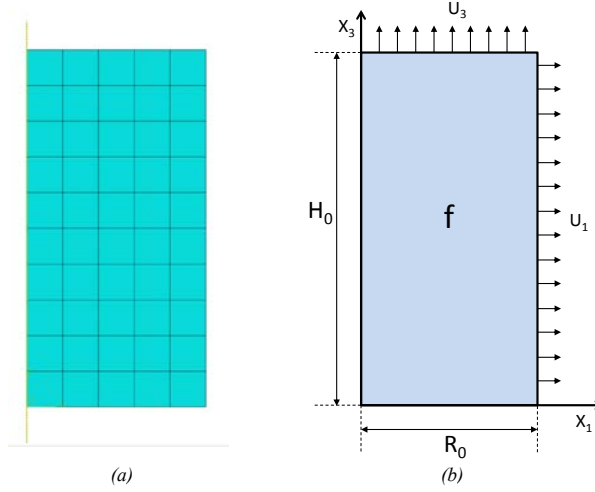


Fig. 4.13 Malla inicial del cilindro (a) y condiciones de contorno de desplazamiento impuestas en la celda unitaria (b)

2004; Vadillo y Fernández-Sáez, 2009) en análisis de celdas unitarias. Las condiciones de contorno de desplazamiento en las caras externas de la celda se implementan a través de una subrutina de usuario MPC en el código de elementos finitos. En el apartado 5.2.1 se encuentra una descripción más detallada del procedimiento.

Para materiales hipoelásticos-plásticos, el tensor de velocidades de deformación plástica macroscópico $\dot{\mathbf{E}}^p$ está relacionado con la variación temporal de la tensión macroscópica por la expresión

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p), \quad (4.80)$$

donde \mathbf{C} es el tensor isótropo elástico, que se define como

$$\mathbf{C} = 2G\mathbf{I}' + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (4.81)$$

y con $G = E/(2(1 + \nu))$ y $K = E/(3(1 - 2\nu))$ como constantes elásticas. E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson. Por otra parte, \mathbf{I}' es el tensor desviador unitario de cuarto orden que se define como

$$(\mathbf{I}')_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (4.82)$$

El comportamiento dúctil del material viene definido por la función de plastificación original de Gurson et al. (1977), de la ecuación (4.34), introduciendo la dependencia con la velocidad de deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ directamente en el límite elástico $\bar{\sigma}$ de la superficie de plastificación. Con este método heurístico, se obtiene la función de

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

plastificación

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2 f \cosh \left(\frac{\sqrt{3} \Sigma_1}{\bar{\sigma}} \right) - (1 + f^2) = 0, \quad (4.83)$$

donde el límite elástico de Von Mises se define en este caso con la ley

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}^p}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} \right)^m. \quad (4.84)$$

Las propiedades del material utilizadas son $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 1 \text{ MPa}$, $\sigma_0 = 2000 \text{ MPa}$, $\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ y $m = 0.01, 0.05$ y 0.1 . Estos valores de la sensibilidad con la velocidad de deformación son empleados en una amplia variedad de materiales metálicos (Ghosh, 1977; Klöcker y Tvergaard, 2003).

Asimismo, la evolución de la porosidad, teniendo en cuenta únicamente el crecimiento de huecos, se puede expresar como

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\mathbf{E}}^p : \mathbf{1}, \quad (4.85)$$

con el tensor macroscópico de velocidad de deformación plástica

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad (4.86)$$

y el multiplicador plástico

$$\dot{\lambda} = \frac{(1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p}{\Sigma : \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}}. \quad (4.87)$$

Y para completar la formulación presentada, es necesario considerar las condiciones de Kuhn-Tucker de carga-descarga. Esto implica que $\dot{\lambda} = 0$ y $\Phi < 0$ durante el proceso elástico de carga o descarga y $\dot{\lambda} > 0$ y $\Phi = 0$ durante el de carga plástica.

Todo el conjunto de ecuaciones constitutivas no lineales se integran en un esquema de elementos finitos. Para ello, es necesario llevar a cabo dos tareas. En primer lugar, se tiene que realizar la actualización de las tensiones y variables de estado dadas por el incremento de deformación. En segundo lugar, es necesario crear un operador tangente consistente para preservar la convergencia cuadrática en la solución del método iterativo de Newton-Raphson. El algoritmo descrito es implementado en el software comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard mediante una subrutina de usuario UMAT. En el apartado 5.4 de esta tesis doctoral se puede encontrar una descripción más detallada del desarrollo de esta subrutina.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados de las simulaciones numéricas con el modelo clásico de Gurson implementado, utilizando el código de elementos finitos mencionado en el apartado 4.5.2, comparándolos con la solución exacta de la función de plastificación.

A su vez, con el objetivo de validar la precisión y la utilidad de las superficies de plastificación presentadas en esta tesis doctoral (ecuaciones (4.74) y (4.79)), también se introducen en la comparación.

Primera aproximación. Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas para un material poroso con dependencia potencial con la velocidad de deformación se presentan en la Figura 4.14, en el espacio $\hat{\Sigma}_1$ - $\hat{\Sigma}_{eq}$ y para valores del exponente de endurecimiento $m = 0.01$ (a), $m = 0.05$ (c) y $m = 0.1$ (e), valores de porosidad $f = 0.01$, $f = 0.05$ y $f = 0.1$, estableciendo un límite de triaxialidad $T = 3$. Las líneas discontinuas representan las soluciones exactas de la función de plastificación, obtenidas resolviendo numéricamente las integrales de las ecuaciones (4.56) y (4.57). Por otro lado, las líneas continuas se corresponden con la primera aproximación propuesta en esta tesis doctoral, dada en la ecuación (4.74). Las cruces que aparecen en las gráficas son los puntos obtenidos mediante las simulaciones numéricas con el modelo clásico de Gurson.

Se puede observar una gran similitud en los resultados para $m = 0.01$ entre todos los criterios representados, incluidas las simulaciones numéricas. Sin embargo, a medida que se aumenta el valor del exponente m se produce un distanciamiento muy apreciable en los valores obtenidos en el modelo de elementos finitos, acentuado en valores altos de $\hat{\Sigma}_1$ (o incrementando la triaxialidad). Comparando estos con la primera aproximación presentada, se puede ver que para el valor más alto de porosidad analizado ($f = 0.1$), ambos se comportan de manera similar, pero para valores más pequeños de f , la precisión de la aproximación analítica es notablemente mejor. Esta mejora de resultados con valores de f pequeños es atribuida a las aproximaciones realizadas, las cuales son más exactas cuando f es cercano a cero.

Segunda aproximación. En este caso se realiza la misma comparación, pero teniendo en cuenta la segunda aproximación propuesta. En la Figura 4.14 (b), para $m = 0.01$, todas las soluciones son prácticamente coincidentes entre ellas de nuevo. En cambio, para valores mayores de m (Fig. 4.14 (d) y (f)) la segunda aproximación analítica propuesta en esta tesis doctoral tiene un comportamiento mucho más cercano a la solución exacta que los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas para todos los valores de f analizados, incluso en valores de $f = 0.3$.

Por lo tanto, se puede decir que la superficie de plastificación presentada en la segunda aproximación, supone una mejora muy evidente a la metodología clásica.

4.5.3 Comparación con otros modelos viscoplásticos

La finalidad de esta sección es la de comparar las predicciones obtenidas con la segunda formulación analítica para materiales viscoplásticos presentada en esta tesis doctoral, con otros modelos desarrollados previamente. En concreto, se va a hacer referencia al modelo propuesto por Leblond et al. (1994b), de aquí en adelante LPS (Leblond-Perrin-Suquet). La formulación del modelo LPS, para materiales con dependencia potencial de la velocidad

Homogeneización de materiales viscoplásticos con huecos cilíndricos: Funciones de plastificación

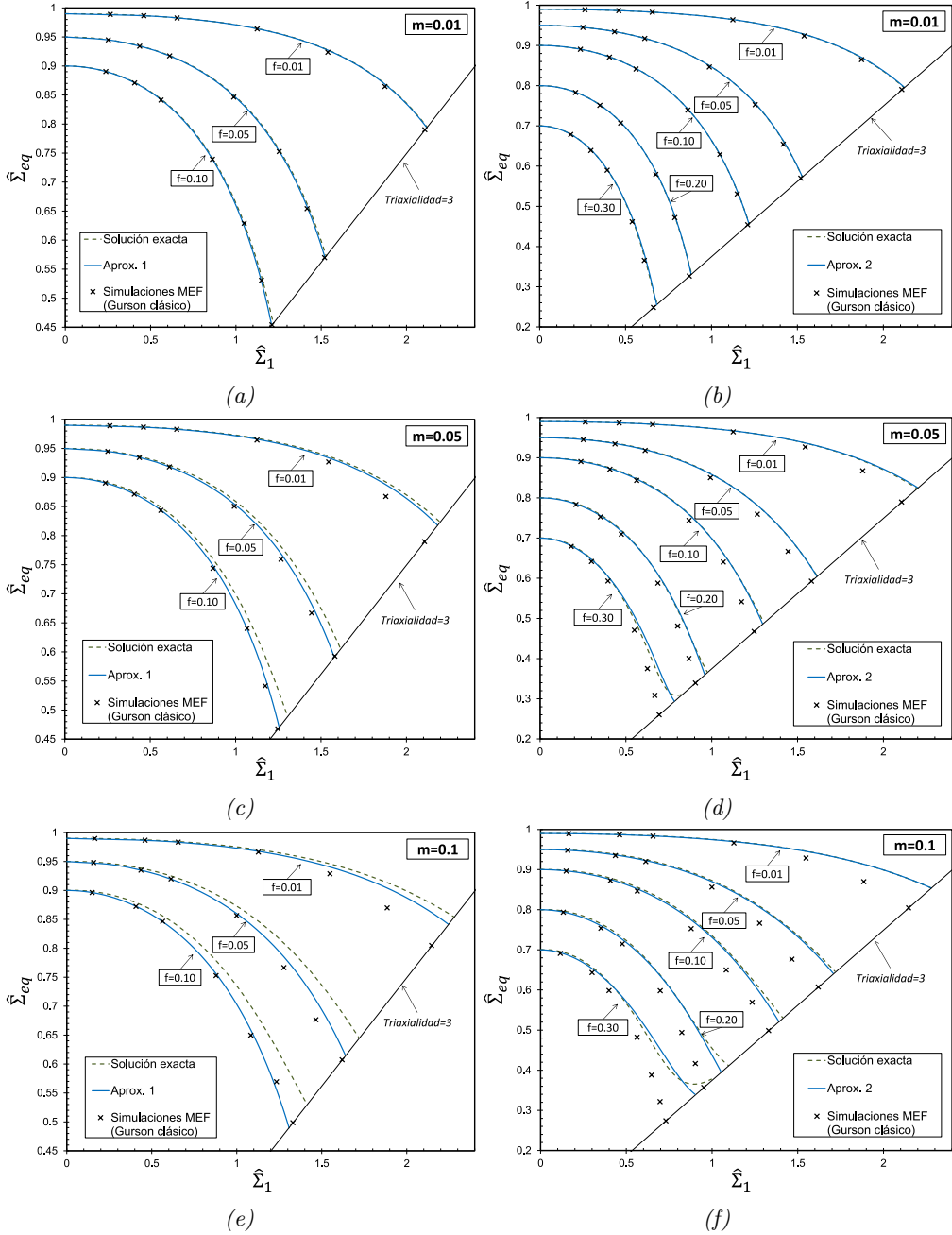


Fig. 4.14 Comparación de los modelos propuestos, el modelo de elementos finitos y la relación exacta $\hat{\Sigma}_1$ - $\hat{\Sigma}_{eq}$, teniendo en cuenta la primera aproximación en (a), (c) y (e), y la segunda aproximación en (b), (d) y (f), para diferentes valores de f y m

de deformación y con huecos cilíndricos, viene dada por función de plastificación $\bar{\Psi}_a$,

$$\bar{\Psi}_a(Q, M) = Q^2 + f \left(h(M) + \frac{1-m}{1+m} \frac{1}{h(M)} \right) - 1 - \frac{1-m}{1+m} f^2, \quad (4.88)$$

donde

$$h(M) = \left(1 + m \left(\sqrt{3} |M| \right)^{m+1} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (4.89)$$

con Q y M definidos en términos del *gauge factor* Λ como $Q = \Sigma_{eq}/\Lambda$ y $M = (\Sigma_1 + \Sigma_2)/(2\Lambda)$, teniendo en cuenta la igualdad $\Sigma_1 = \Sigma_2$ debida a la axisimetría. El límite superior utilizado para la aproximación del potencial macroscópico, Ψ_m , se define como

$$\Psi_m(\mathbf{\Sigma}, f) = \frac{\sigma_Y \dot{\epsilon}_0 m}{m+1} \left(\frac{\Lambda(\mathbf{\Sigma}, f)}{\sigma_Y} \right)^{\frac{m+1}{m}} = \frac{\sigma_Y \dot{\epsilon}_0 m}{m+1} (1-f). \quad (4.90)$$

Asimismo, las velocidades de deformación macroscópicas pueden ser calculadas a partir de la ecuación (4.90), utilizando las relaciones

$$\dot{E}_1 = \frac{\partial \Psi_m}{\partial \Sigma_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\partial \Psi_m}{\partial \Sigma_2} \quad y \quad \dot{E}_3 = \frac{\partial \Psi_m}{\partial \Sigma_3}. \quad (4.91)$$

Teniendo en cuenta el modelo LPS, para el caso cilíndrico y para un ratio dado por $\rho = \Sigma_{eq}/\Sigma_1$, se puede determinar el punto (M, Q) de la superficie de plastificación correspondiente para cualquier valor del parámetro m , porosidad f y ratio tensional M , operando en la ecuación (4.88) con $\bar{\Psi}_a(M, \rho M) = 0$. Una vez que se obtiene el valor de M y siendo el valor del *gauge factor* $\Lambda = \sigma_1/M$, el punto con coordenadas $(\rho \Sigma_1, \Sigma_1)$ del límite superior del potencial Ψ_m puede obtenerse utilizando la ecuación (4.90). Por otra parte, las velocidades de deformación macroscópicas \dot{E}_1 y \dot{E}_3 necesitan ser derivadas del potencial Ψ_m respecto a $\mathbf{\Sigma}$ (ecuación (4.91)).

En el potencial del modelo LPS, utilizando el límite superior de la ecuación (4.90), un punto $\Psi_m(\Sigma_1, \rho \Sigma_1)$ se encuentra en el espacio $\hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_{eq}$ con $\hat{\Sigma}_1 = \Sigma_1 / \left(\sigma_Y (\dot{E}_{eq}/\dot{\epsilon}_0)^m \right)$, $\hat{\Sigma}_{eq} = \rho \hat{\Sigma}_1$ y $\dot{E}_{eq} = \frac{2}{3} (\dot{E}_3 - \dot{E}_1)$. En definitiva, para valores dados de σ_Y , $\dot{\epsilon}$, ρ , f y m , la relación $\hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_{eq}$ en el modelo LPS requiere la solución de las variables Λ , Σ_1 , \dot{E}_1 y \dot{E}_3 , lo que implica un notable coste computacional.

Los resultados obtenidos haciendo uso del modelo LPS en el espacio $\hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_{eq}$ se muestran en la Figura 4.15, para valores de porosidad $f = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ y 0.3 y valores del exponente $m = 0.01$ y $m = 0.1$. Asimismo, se presenta una comparación con la segunda aproximación analítica realizada en esta tesis doctoral y la solución exacta de la función de plastificación, obtenida resolviendo numéricamente las integrales de las ecuaciones (4.56) y (4.57). Se puede observar una gran similitud entre las diferentes curvas para todo el rango de triaxialidades, porosidades y exponentes de endurecimiento por velocidad de deformación analizados. Si bien es cierto, que para valores de triaxialidad cercanos a 3 y un valor de $m = 0.1$, el modelo LPS parece tener una mejor predicción del comportamiento del material que la segunda superficie de plastificación propuesta, el hecho de que este modelo sea mucho más complejo de utilizar y más costoso computacionalmente, convierten a la función de plastificación propuesta en la ecuación (4.79) en una alternativa

fiable y más simple para reproducir el comportamiento de materiales sensibles a la velocidad de deformación con poros cilíndricos.

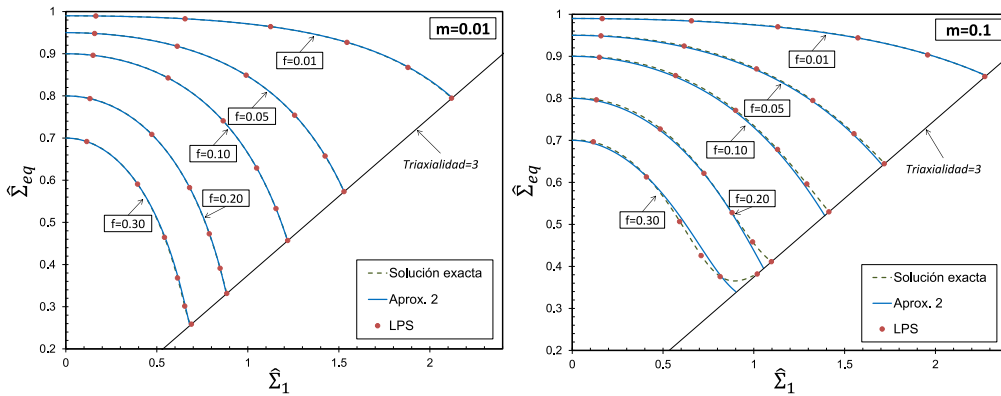


Fig. 4.15 Comparación de la segunda superficie de plastificación propuesta, el modelo LPS (Leblond et al., 1994b) y la relación exacta $\hat{\Sigma}_1$ - $\hat{\Sigma}_{eq}$, para diferentes valores de f y m

4.6 Resumen y conclusiones

En este capítulo se ha presentado una modificación del modelo de Gurson et al. (1977) para huecos cilíndricos, donde se extiende su uso a materiales con una dependencia potencial del material de la matriz con la velocidad de deformación plástica. Para ello, se ha hecho uso de un modelo de celda cilíndrica unitaria con hueco cilíndrico y, basándose en principios micromecánicos, se ha llegado a las ecuaciones integrales que definen su comportamiento.

Dichas integrales tienen solución para valores del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación de $m = 0$ y $m = 1$, por lo que se han conseguido formular las correspondientes funciones de plastificación analíticas exactas. Para valores de m intermedios entre 0 y 1, se han propuesto dos expresiones cerradas de funciones de plastificación basadas en aproximaciones analíticas, las cuales se han comparado con la resolución numérica de las integrales (solución "exacta"). La primera de las aproximaciones es analíticamente más simple, mostrando muy buenos resultados para valores del exponente $m \leq 0.05$ y para los rangos de porosidad y triaxialidad analizados ($0 \leq f \leq 0.1$ y $0 \leq T \leq 3$). La segunda aproximación analítica tiene una complejidad mayor. Sin embargo, esta función de plastificación presenta excelentes resultados, incluso para los valores más altos del exponente de endurecimiento estudiados ($m = 0.1$) y para un rango de porosidad más extenso ($0 \leq f \leq 0.3$).

A su vez, se han comparado las dos aproximaciones de funciones de plastificación presentadas en este capítulo, con resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas en un software comercial de elementos finitos (ABAQUS/Standard). En las simulaciones,

el modelo constitutivo utilizado introduce la dependencia con la velocidad de deformación directamente en la superficie de plastificación original de Gurson, sustituyendo la constante de referencia σ_0 por un límite elástico que es función de la velocidad de deformación plástica equivalente. Los resultados obtenidos presentan una evidente pérdida de precisión de este modelo clásico en el momento en que el exponente m aumenta, sobre todo a partir de valores de $m \geq 0.05$.

En conclusión, para el amplio rango de porosidad y triaxialidad analizado, los puntos clave de este estudio se pueden resumir de la siguiente manera:

- Para valores pequeños del exponente de endurecimiento ($m \approx 0.01$), todas las superficies de plastificación analizadas tienen un comportamiento similar.
- Para valores de m mayores ($m \geq 0.05$), las dos funciones de plastificación analíticas, primera y segunda aproximación, suponen una mejora muy evidente a la hora de predecir el comportamiento de materiales sensibles a la velocidad de deformación que utilizando el modelo clásico de Gurson.
- Ambas aproximaciones analíticas recuperan el resultado exacto del modelo de Gurson cuando el valor de m es igual a cero y utilizan constantes en la aproximación que son totalmente independientes del material.
- Por último, la segunda aproximación propuesta presenta una gran precisión en los resultados, al igual que otros modelos viscoplásticos analizados en este trabajo, siendo de mayor facilidad en la implementación en códigos de elementos finitos y suponiendo menor coste computacional.

5

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

En el presente capítulo se desarrolla una extensión del modelo Gurson-Tvergaard (GT) que añade la dependencia con la triaxialidad y el parámetro de Lode, a través de los parámetros de ajuste del modelo. En primer lugar, se constata la necesidad de incluir la dependencia del modelo GT con el parámetro de Lode, utilizando modelos de celda unitaria en un código de elementos finitos donde se estudia el caso de una celda con hueco y material Von Mises, y comparándolo con los resultados de una celda homogénea y material GT. A su vez, se desarrolla la formulación del modelo propuesto y su implementación numérica en el código de elementos finitos, para su posterior validación.

5.1 Introducción

El proceso de fractura dúctil en metales y aleaciones metálicas está ligado normalmente a un mecanismo de fallo producido por la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Con el fin de analizar el fallo dúctil de materiales porosos, el modelo más utilizado es el de Gurson-Tvergaard. Tvergaard (1981, 1982) modificó el modelo original de Gurson et al. (1977), introduciendo unos parámetros de ajuste q_1 y q_2 para describir con mayor precisión el proceso de crecimiento del hueco (más información en el Capítulo 3).

Los parámetros de ajuste que el modelo GT suele emplear toman los valores constantes $q_1 = 1.5$ y $q_2 = 1.0$. No obstante, diferentes autores (Faleskog et al., 1998) demostraron que estos parámetros dependen del endurecimiento por deformación del material.

En los últimos años, diferentes autores (Bai y Wierzbicki, 2008; Bao y Wierzbicki, 2004; Barsoum y Faleskog, 2007, 2011; Barsoum et al., 2011; Benallal et al., 2014; Brünig et al., 2008; Danas y Ponte Castañeda, 2012; Gao y Kim, 2006; Jackiewicz, 2011; Kim et al., 2003, 2007; Wen et al., 2005; Xue, 2007, 2008; Zhang et al., 2001) han remarcado que la triaxialidad tensional y el parámetro de Lode son necesarios para caracterizar el fallo dúctil. A su vez, han expuesto que el tercer invariante del tensor de tensiones

desviadoras tiene una gran influencia en la velocidad de crecimiento de los microvacíos y otros aspectos del comportamiento de huecos que juegan un papel muy importante en el ablandamiento por deformación y en la localización. Por otro lado, Zhang et al. (2001) y Kim et al. (2004) pusieron de manifiesto que los parámetros de ajuste del modelo GT también dependen del estado tensional aplicado, tanto de la triaxialidad como del parámetro de Lode, aunque no lo incorporaron en la formulación. Siguiendo con esta idea, en el trabajo de Vadillo y Fernández-Sáez (2009) se propuso un modelo GT mejorado, con unos parámetros q_1 y q_2 que dependen de la triaxialidad del estado tensional, lo que mejora la predicción del modelo.

En este capítulo, se presenta una mejora del modelo de Gurson-Tvergaard, para materiales con endurecimiento por deformación, que tiene en cuenta la influencia del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras a altos valores de triaxialidad. Dicha modificación consiste en incorporar el efecto del parámetro de Lode en la superficie de plastificación del modelo GT a través de los parámetros q_1 y q_2 , además de una dependencia con la triaxialidad.

5.2 Celda unitaria tridimensional cúbica con hueco esférico

Bajo la hipótesis de una microestructura periódica, un material poroso puede ser aproximado por un conjunto de volúmenes representativos, cada uno conteniendo un único hueco. Los modelos de celda axisimétricos son una manera muy conveniente de simplificar el problema, debido a que solo requieren de cálculo bidimensional, por lo que son los más utilizados en análisis de comportamiento de materiales. Sin embargo, si se tienen en cuenta únicamente condiciones axisimétricas se ignora la influencia de otros posibles valores del parámetro de Lode.

En un caso tridimensional general, el tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras o parámetro de Lode L , se puede definir en función de las tensiones principales macroscópicas Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 (con $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$) como

$$L = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3}, \quad (5.1)$$

y es utilizado en problemas isótropos como tercer parámetro de medida del estado tensional, junto con la tensión hidrostática Σ_h y la tensión equivalente Σ_{eq} (Kim et al., 2007; Nahshon y Hutchinson, 2008). El parámetro de Lode puede tener cualquier valor comprendido entre los valores -1 y 1. No obstante, en problemas axisimétricos con $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 = \Sigma_3$, el Lode únicamente puede tener valor -1, por lo que se ignoran el resto de posibles valores.

Con el objetivo de analizar la influencia del parámetro de Lode en un material poroso, en este capítulo se considera una celda cúbica tridimensional, con dimensiones iniciales

$2D_{01}$, $2D_{02}$ y $2D_{03}$, que contiene un hueco esférico en su interior de radio inicial r_0 (Figura 5.1). Asimismo, se analiza la celda unitaria de dos maneras diferentes. En primer lugar, se estudia la celda con un material que obedece la teoría de plasticidad J_2 , conteniendo un hueco esférico en su interior. Por otro lado, se analiza una celda cúbica homogénea, sin hueco, con un material continuo que obedece el criterio de plastificación GT y que tiene una porosidad inicial de igual valor que la celda con hueco ($f_0 = \pi r_0^3 / (6D_{01}D_{02}D_{03})$). Ambas celdas están sometidas a las mismas condiciones de carga macroscópicas, las cuales se establecen imponiendo desplazamientos normales a las superficies externas del cubo. Debido a la simetría del problema, solo es necesario realizar un modelo de una octava parte del total de la celda.

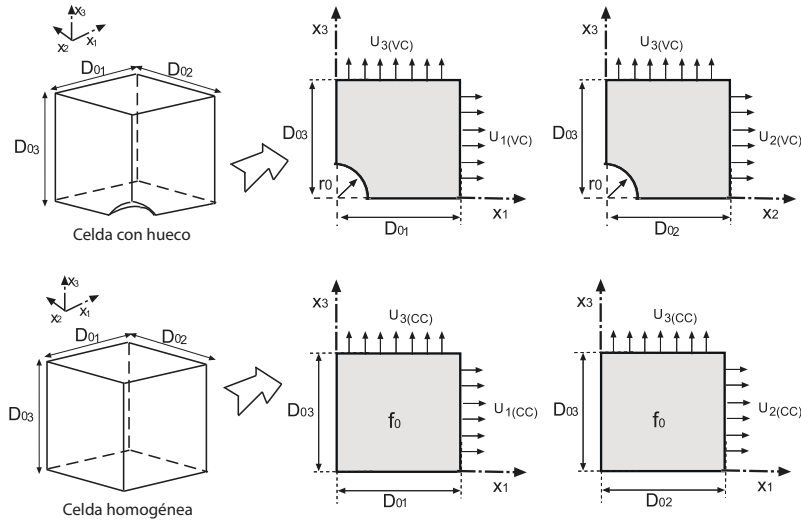


Fig. 5.1 Geometría inicial y condiciones de contorno impuestas en la celda con y sin hueco

Asumiendo que las caras externas de cada celda se mantienen siempre paralelas a los correspondientes planos principales (no hay deformación angular en ellas), las condiciones de contorno en cada celda durante el proceso de deformación son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ en } x_1 = 0, & u_1 &= U_1 \text{ en } x_1 = D_1, \\ u_2 &= 0 \text{ en } x_2 = 0, & u_2 &= U_2 \text{ en } x_2 = D_2, \\ u_3 &= 0 \text{ en } x_3 = 0, & u_3 &= U_3 \text{ en } x_3 = D_3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por otra parte, las deformaciones macroscópicas logarítmicas en direcciones principales se pueden expresar como

$$E_1 = \ln \left(\frac{D_1}{D_{01}} \right), \quad E_2 = \ln \left(\frac{D_2}{D_{02}} \right), \quad \text{y} \quad E_3 = \ln \left(\frac{D_3}{D_{03}} \right), \quad (5.3)$$

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

siendo la deformación macroscópica equivalente

$$E_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left((E_1 - E_2)^2 + (E_1 - E_3)^2 + (E_2 - E_3)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Del mismo modo, las velocidades de deformación macroscópicas en la celda (con y sin hueco) vienen dadas por las expresiones

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{D}_1}{D_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\dot{D}_2}{D_2} \quad \text{y} \quad \dot{E}_3 = \frac{\dot{D}_3}{D_3}, \quad (5.5)$$

donde $D_1 = D_{01} + U_1$, $D_2 = D_{02} + U_2$ y $D_3 = D_{03} + U_3$ son las longitudes deformadas de la celda unitaria.

Las tensiones macroscópicas en direcciones principales (Σ_1 , Σ_2 y Σ_3) se definen, en función del tensor de tensiones de Cauchy $[\sigma_{ii}]$, como

$$\Sigma_i = \frac{1}{D_j D_k} \int_0^{D_j} \int_0^{D_k} [\sigma_{ii}]_{x_i=D_i} dx_j dx_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad i \neq j, k, \quad (5.6)$$

siendo Σ_{eq} y Σ_h la tensión macroscópica equivalente y la tensión hidrostática, cuyas definiciones son

$$\Sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_1 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 \right)^{1/2}, \quad \Sigma_h = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3}. \quad (5.7)$$

Por último, la triaxialidad del estado tensional macroscópico T y el parámetro de Lode L se definen, en función de las tensiones macroscópicas en direcciones principales, como

$$T = \frac{\Sigma_h}{\Sigma_e}, \quad L = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3}. \quad (5.8)$$

Si se definen los cocientes de tensión macroscópica

$$Q = \frac{\Sigma_3}{\Sigma_1}, \quad R = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}, \quad (5.9)$$

también se puede expresar la triaxialidad y el parámetro de Lode, en función de Q y R , como

$$T = \frac{\sqrt{2}(R + Q + 1)}{3\sqrt{(1 - R)^2 + (1 - Q)^2 + (R - Q)^2}}, \quad L = \frac{2R - Q - 1}{1 - Q}. \quad (5.10)$$

5.2.1 Condiciones de contorno para prescribir la triaxialidad y el parámetro de Lode

Con el objetivo de estudiar el efecto de la triaxialidad T y el parámetro de Lode L en el comportamiento mecánico de la celda unitaria, se implementan condiciones de contorno que prescriben las relaciones de las tensiones principales macroscópicas $R = \Sigma_2/\Sigma_1$ y

$Q = \Sigma_3/\Sigma_1$ durante el proceso de carga en el modelo (con $R = Q$ en el caso axisimétrico). El método empleado en este trabajo realiza un control de desplazamientos y no en carga, por lo que evita problemas numéricos asociados al ablandamiento del material debido al crecimiento de la porosidad. Faleskog et al. (1998) desarrolló este método para prescribir la triaxialidad en un celda cúbica sometida a un estado de deformación plana. En este trabajo, este procedimiento se extiende para prescribir tanto la triaxialidad como el parámetro de Lode en una celda cúbica unitaria.

La variación del trabajo total de deformación en la celda J_2 con hueco (VC) y en la celda homogénea con material GT (GC) puede expresarse como (Hill, 1967)

$$\dot{W}_{GC} = \dot{W}_{VC} = V\Sigma_1\dot{E}_1 + V\Sigma_2\dot{E}_2 + V\Sigma_3\dot{E}_3, \quad (5.11)$$

donde V es el volumen de la celda. Entonces, si se definen los valores de carga $P_1 = V\Sigma_1$, $P_2 = V\Sigma_2$ y $P_3 = V\Sigma_3$, la ecuación (5.11) se puede reescribir como

$$\dot{W}_{GC} = \dot{W}_{VC} = P_1\dot{E}_1 + P_2\dot{E}_2 + P_3\dot{E}_3. \quad (5.12)$$

Asimismo, los valores P_1 , P_2 y P_3 deben satisfacer las relaciones $P_2/P_1 = R$ y $P_3/P_1 = Q$ para prescribir los cocientes de tensión macroscópica R y Q en las celdas unitarias. Por lo tanto, si se realiza la transformación

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{(I)} \\ \dot{E}_{(II)} \\ \dot{E}_{(III)} \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{(I)} \\ P_{(II)} \\ P_{(III)} \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde \mathbf{N} es la matriz ortonormal ($\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$) asimétrica

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

con los términos que la componen definidos como

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1+R^2+Q^2}}, & A_{12} &= \frac{R}{\sqrt{1+R^2+Q^2}}, & A_{13} &= \frac{Q}{\sqrt{1+R^2+Q^2}}, \\ A_{21} &= -\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}, & A_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1+R^2}}, & A_{23} &= 0, \\ A_{31} &= \frac{Q}{\sqrt{(1+R^2)(1+R^2+Q^2)}}, & A_{32} &= \frac{RQ}{\sqrt{(1+R^2)(1+R^2+Q^2)}}, & & \\ A_{33} &= -\frac{(1+R^2)}{\sqrt{(1+R^2)(1+R^2+Q^2)}}, & & & & \end{aligned} \quad (5.15)$$

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

la variación del trabajo total de deformación se puede escribir, en el nuevo sistema coordenado, como

$$\dot{W}_{GC} = \dot{W}_{VC} = P_{(I)}\dot{E}_{(I)} + P_{(II)}\dot{E}_{(II)} + P_{(III)}\dot{E}_{(III)}. \quad (5.16)$$

Por otra parte, si en el nuevo sistema coordenado las condiciones de contorno impuestas son de tracción uniaxial,

$$\dot{E}_{(I)} = \dot{E}_I, \quad P_{(II)} = 0, \quad P_{(III)} = 0, \quad (5.17)$$

entonces la variación del trabajo total de deformación tiene la forma, en el nuevo sistema, $\dot{W}_{GC} = \dot{W}_{VC} = P_{(I)}\dot{E}_I$. Por consiguiente, en el sistema coordenado inicial y considerando las relaciones dadas en la ecuación (5.13), las condiciones de contorno aplicadas a las celdas serán

$$\begin{aligned} \dot{E}_{(I)} = \dot{E}_I &\rightarrow A_{11}\dot{E}_1 + A_{12}\dot{E}_2 + A_{13}\dot{E}_3 = \dot{E}_I, \\ P_{(II)} = 0 &\rightarrow A_{21}P_1 + A_{22}P_2 + A_{23}P_3 = 0, \\ P_{(III)} = 0 &\rightarrow A_{31}P_1 + A_{32}P_2 + A_{33}P_3 = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

o de una forma equivalente,

$$\dot{E}_1 + R\dot{E}_2 + Q\dot{E}_3 = \dot{E}_I\sqrt{1 + R^2 + Q^2}, \quad (5.19)$$

$$R\Sigma_1 = \Sigma_2,$$

$$Q\Sigma_1 = \Sigma_3. \quad (5.20)$$

Para valores dados de R , Q y \dot{E}_I , imponer las tres condiciones de contorno en el sistema transformado de las celdas continua y con hueco ($\dot{E}_{(I)} = \dot{E}_I$, $P_{(II)} = 0$, $P_{(III)} = 0$), implica prescribir en el sistema de coordenadas inicial de ambas celdas las relaciones

$$\begin{aligned} (\dot{E}_1 + R\dot{E}_2 + Q\dot{E}_3)_{GC} &= (\dot{E}_1 + R\dot{E}_2 + Q\dot{E}_3)_{VC}, \\ (\Sigma_2/\Sigma_1)_{GC} &= (\Sigma_2/\Sigma_1)_{VC} = R, \\ (\Sigma_3/\Sigma_1)_{GC} &= (\Sigma_3/\Sigma_1)_{VC} = Q, \end{aligned} \quad (5.21)$$

con las relaciones de las tensiones principales macroscópicas, Q y R , dependientes de la triaxialidad y del parámetro de Lode (ecuación (5.10)).

Por último, en cada paso temporal, y con el objetivo de prescribir Q y R , los desplazamientos incrementales \dot{U}_1 , \dot{U}_2 y \dot{U}_3 , que deben imponerse en las superficies externas de cada celda en direcciones 1, 2 y 3, respectivamente, deben satisfacer las

expresiones

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= (D_{01} + U_1) \dot{E}_1, \\ \dot{U}_2 &= (D_{02} + U_2) \dot{E}_2, \\ \dot{U}_3 &= (D_{03} + U_3) \dot{E}_3,\end{aligned}\tag{5.22}$$

donde D_{01} , D_{02} y D_{03} son las dimensiones iniciales de la celda en cada dirección.

Las condiciones de contorno presentadas en este apartado han sido implementadas en cada una de las superficies exteriores de las celdas unitarias utilizando una subrutina de usuario MULTIPOINT-CONSTRAINT (MPC), en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014).

5.2.2 Resultados numéricos

Como ya se ha comentado, muchos autores (Gao et al., 2005; Kim et al., 2007; Xue, 2008; Zhang et al., 2001) han demostrado que una celda con hueco y material J_2 , sometida a la misma triaxialidad, se comporta de manera diferente cuando varía el valor del parámetro de Lode. En este apartado, se analiza la evolución de la curva tensión-deformación y del crecimiento de la porosidad hasta la coalescencia, de una celda J_2 con hueco sometida a valores establecidos de triaxialidad y del parámetro de Lode.

Se estudia un rango de altas triaxialidades ($1 \leq T \leq 2$) y valores de L comprendidos en el rango $-1 \leq L \leq 1$. Por otra parte, el material escogido para el análisis es un acero ferrítico de alta resistencia (Weldox 960), el cual tiene dependencia con el parámetro de Lode tal y como fue demostrado experimentalmente por Barsoum y Faleskog (2011). Este material puede ser aproximado por la ley constitutiva

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^N & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}, \tag{5.23}$$

donde σ_0 representa el límite elástico inicial, N es el exponente de endurecimiento por deformación y $\varepsilon = \sigma_0/E$ siendo E el módulo de Young. Todas las propiedades del material se pueden ver en la Tabla (5.1).

Tabla 5.1 Propiedades del acero de alta resistencia Weldox 960

E (GPa)	ν	σ_0 (MPa)	N	ε_0
208	0.3	956	0.059	0.0046

Es importante destacar que, a valores altos de triaxialidad ($T > 1$), los mecanismos que gobiernan el proceso de fractura dúctil son el aumento de volumen y la coalescencia de las cavidades presentes en el material. En estos valores de triaxialidad, los huecos con forma inicial esférica no cambian de geometría durante el proceso de carga. Sin

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

embargo, a valores de triaxialidad medios, bajos y negativos ($T < 1$), otros efectos deben ser tenidos en cuenta en el proceso de ablandamiento y fractura del material dúctil, como pueden ser el cambio de forma del hueco o su rotación durante el proceso de carga. En este trabajo, solo se analiza el comportamiento del material a valores altos de triaxialidad.

El volumen representativo considerado en este estudio consiste en un octavo de una celda cúbica con dimensiones iniciales $D_{01} = D_{02} = D_{03} = 1 \text{ mm}$. El hueco esférico contenido en su interior tiene un tamaño inicial correspondiente a las dos diferentes fracciones de volumen consideradas ($f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$), porosidades que son representativas de metales dúctiles con interés industrial. Por otro lado, el material que rodea al hueco (matriz) obedece la teoría de plasticidad de Von Mises.

En la Figura 5.2 se puede ver un ejemplo de la malla empleada para el caso de celda con porosidad inicial $f_0 = 0.005$. En este caso, el modelo se compone de un total de 8 680 elementos tipo C3D8R, hexaedros lineales de ocho nodos con integración reducida y control de hourglass. Cada cara, está compuesta por 22 elementos alrededor del hueco y 20 elementos en la dirección longitudinal. Los análisis numéricos se realizan utilizando el software comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014). Asimismo, las condiciones de contorno se prescriben siguiendo el método descrito en el apartado 5.2.1 mediante una subrutina de usuario MPC y el modelo de material se implementa mediante una subrutina de usuario tipo UMAT.

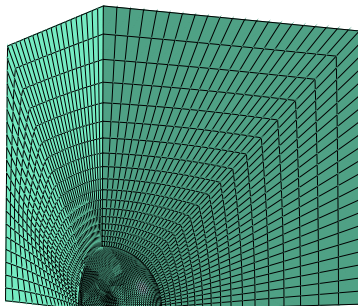


Fig. 5.2 Mallado de una celda unitaria cúbica con un hueco esférico en su interior, para una porosidad $f_0 = 0.005$

Por otro lado, en la Figura 5.3 se analiza la evolución de la tensión macroscópica equivalente Σ_{eq} , adimensionalizada con el límite elástico inicial σ_0 , en función de la deformación macroscópica equivalente E_{eq} . En concreto, para una porosidad inicial $f_0 = 0.005$, una triaxialidad $T = 1$ y diferentes valores del parámetro de Lode $L = -1, -0.5, -0.2, 0, 0.2, 0.5$ y 1 . Es fácil identificar en la gráfica el efecto, por una parte, del endurecimiento por deformación de la matriz y, por otra, el ablandamiento del conjunto macroscópico debido al aumento progresivo de la porosidad. Cuando la deformación equivalente aumenta se alcanza un valor máximo de Σ_{eq}/σ_0 y, a partir de ahí, la tensión macroscópica equivalente disminuye debido a que el endurecimiento por deformación no es capaz de estabilizar el efecto de la reducción del ligamento de la celda causado por

el crecimiento del hueco. A su vez, se puede observar que para un valor de triaxialidad constante e igual a uno, se produce una mayor velocidad de crecimiento de la porosidad a medida que disminuyen los valores del parámetro de Lode. Por lo tanto, para un valor de $L = -1$, la porosidad tiene un crecimiento máximo, lo que se traduce en una menor resistencia del material. Para altas triaxialidades ($T > 1$), este comportamiento también ha sido observado por otros autores (Zhang et al., 2001). Por otro lado, en las curvas de la Figura 5.3 se indica con un círculo la pérdida rápida de capacidad de carga del material por un crecimiento acelerado de la porosidad, definiendo así el inicio de la coalescencia del hueco en el material.

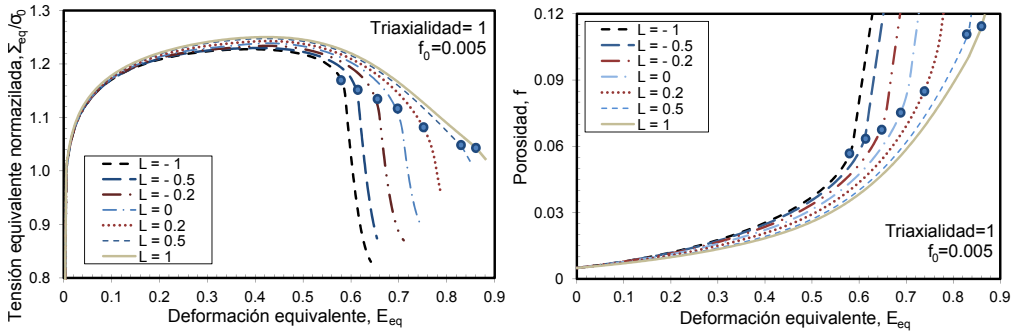


Fig. 5.3 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente, para $f_0 = 0.005$ y $T = 1$

Al igual que en el trabajo de Koplik y Needleman (1988) y Kim et al. (2004), con el objetivo de tener en cuenta el inicio de la coalescencia en el material, se representa en la Figura 5.4 la evolución del tamaño relativo del ligamento de la celda con hueco $(D_i - D_{i0})/D_{i0}$ en las tres direcciones principales, en función de E_{eq} para diferentes estados de carga. Se muestran dos casos con una porosidad inicial $f_0 = 0.005$, parámetro de Lode $L = 0$ y dos valores de triaxialidad, $T = 1$ y $T = 2$. El valor de deformación equivalente en el que el estrechamiento o alargamiento del ligamento se detiene, en una o dos direcciones, y se produce una rápida variación en las otras, captura la deformación de flujo plástico precursora del fenómeno de coalescencia. La deformación de coalescencia E_c depende tanto de la triaxialidad como del parámetro de Lode, aumenta cuando el valor de T decrece y disminuye cuando el valor de L crece.

Además del crecimiento del volumen de hueco y la deformación crítica de coalescencia, la forma del hueco durante la expansión se ve también afectada por el valor del parámetro de Lode, aun manteniéndose constante el valor de triaxialidad. Además, la influencia del parámetro de Lode en el cambio de forma de la cavidad se acentúa cuando el valor de la triaxialidad aplicada es pequeño (Zhang et al., 2001). En la Figura 5.5 se representa la forma de la cavidad para diferentes valores de triaxialidad, deformación equivalente y parámetro de Lode, y para un hueco esférico inicial correspondiente a $f_0 = 0.005$. En el primer caso, se muestra un valor de $T = 0.8$ y $E_{eq} = 0.5$, lejos de la deformación

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

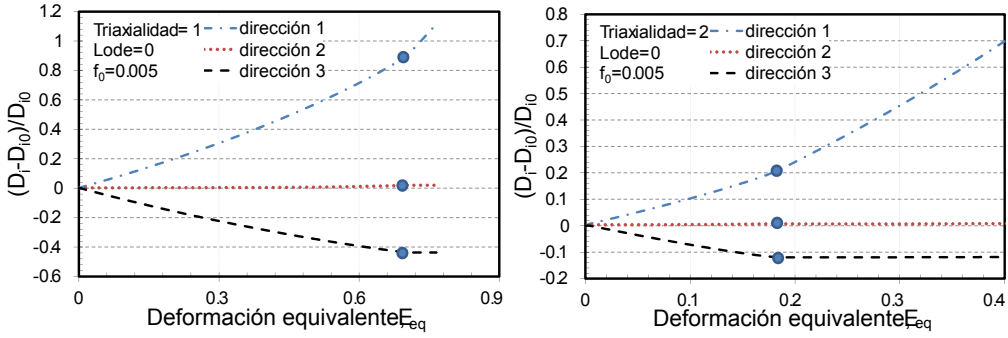


Fig. 5.4 Evolución del tamaño relativo del ligamento de la celda con hueco en direcciones 1, 2 y 3, para $f_0 = 0.005$, $L = 0$ y $T = 1, 2$. Se refleja el momento en el que se produce la localización o coalescencia mediante círculos

de coalescencia en el material. Se puede ver que, en estas condiciones, cuando $L = 1$ la cavidad tiene forma de moneda circular, para $L = 0$ forma de moneda elíptica y para $L = -1$ se convierte en un esferoide achatado. No obstante, para $T = 2$ y $E_{eq} = 0.1$, un valor próximo a la deformación de coalescencia en este caso, la forma del hueco se mantiene prácticamente esférica para los valores de L analizados.

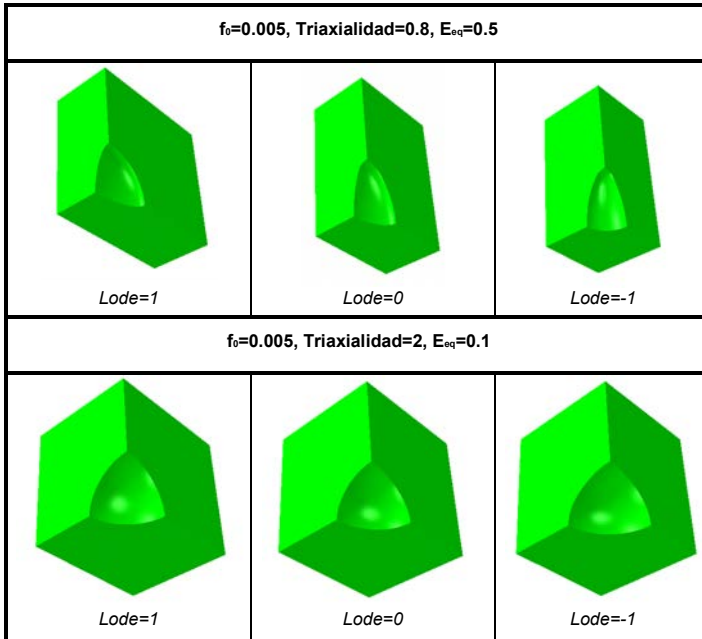


Fig. 5.5 Variación de forma del hueco durante la expansión dependiendo del parámetro de Lode para $E_{eq} = 0.5$ y $T = 0.8$ y para $E_{eq} = 0.1$ y $T = 2$, con una porosidad inicial $f_0 = 0.005$

5.3 Modelo Gurson-Tvergaard modificado con dependencia del parámetro de Lode

Como principal innovación, en este capítulo se propone una modificación del modelo Gurson-Tvergaard original, con el objetivo de tener en cuenta la influencia de la triaxialidad y del parámetro de Lode en el comportamiento del material.

La función de plastificación original del modelo Gurson-Tvergaard (GT) tiene la forma

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - (1 + q_1^2 f^2), \quad (5.24)$$

donde f es la fracción de volumen, $\bar{\sigma}$ el límite elástico del material de la matriz y Σ_{eq} y Σ_h las tensiones macroscópicas equivalente e hidrostática, definidas en función del tensor de tensiones macroscópicas Σ , el tensor de tensiones desviadoras Σ' y el tensor unitario de segundo orden $\mathbf{1}$, como

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma' : \Sigma'}, \quad \Sigma_h = \frac{1}{3} \Sigma : \mathbf{1}, \quad \Sigma' = \Sigma - \Sigma_h \mathbf{1}. \quad (5.25)$$

Los parámetros q_1 y q_2 fueron introducidos por Tvergaard (1981, 1982) con el objetivo de mejorar las predicciones del modelo. Cabe destacar, que el modelo GT no tiene dependencia con el tercer invariante del tensor de tensiones. Además, tampoco captura el proceso de coalescencia y, por lo tanto, el comportamiento del material en esta fase no se ha tenido en cuenta en este trabajo.

Dichos parámetros q_1 y q_2 son dependientes en gran medida de las propiedades del material (Faleskog et al., 1998; Gao et al., 1998) y también dependen de la porosidad inicial f_0 y la triaxialidad T (Kim et al., 2004; Vadillo y Fernández-Sáez, 2009). En consecuencia, es necesario realizar una selección adecuada de estos dos parámetros para obtener una correcta representación de la fractura dúctil en materiales. Para ello, los valores de q_1 y q_2 deben ser calibrados para ajustar la curva tensión-deformación y la velocidad de crecimiento del hueco del modelo GT a lo obtenido con la celda J_2 con hueco. Se ha mencionado anteriormente para el modelo de celda con hueco que, si se tiene una triaxialidad y una porosidad inicial dadas, las curvas tensión-deformación, la velocidad de crecimiento del hueco y la deformación de coalescencia difieren notablemente para distintos valores del parámetro de Lode. No obstante, como el modelo GT tradicional no depende del parámetro de Lode L , para la calibración de los parámetros q_1 y q_2 se ha utilizado el valor de L más crítico en lo que a coalescencia se refiere ($L = -1$), para todos los casos estudiados.

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

Con el fin de minimizar las diferencias entre los dos modelos y para realizar una calibración de los parámetros, se introducen dos funciones de error,

$$R_f = \frac{|F^I - F^{II}|}{F^I} \quad \text{y} \quad R_W = \frac{|W^I - W^{II}|}{W^I}, \quad (5.26)$$

donde F representa el área bajo la curva de la porosidad f frente a la deformación macroscópica equivalente E_{eq} , $F = \int_0^{E_c} f dE_{eq}$, y W es el área bajo la curva de la tensión macroscópica equivalente Σ_{eq} frente a E_{eq} , $W = \int_0^{E_c} (\Sigma_{eq}/\sigma_0) dE_{eq}$. A su vez, E_c es la deformación equivalente a la que se alcanza la coalescencia. Los superíndices I y II se refieren a los dos modelos comparados, celda con hueco y modelo GT. $|F^I - F^{II}|$ y $|W^I - W^{II}|$ son las áreas comprendidas entre las curvas $f-E_{eq}$ y $\Sigma_{eq}-E_{eq}$ (zonas azules en la Figura 5.6).

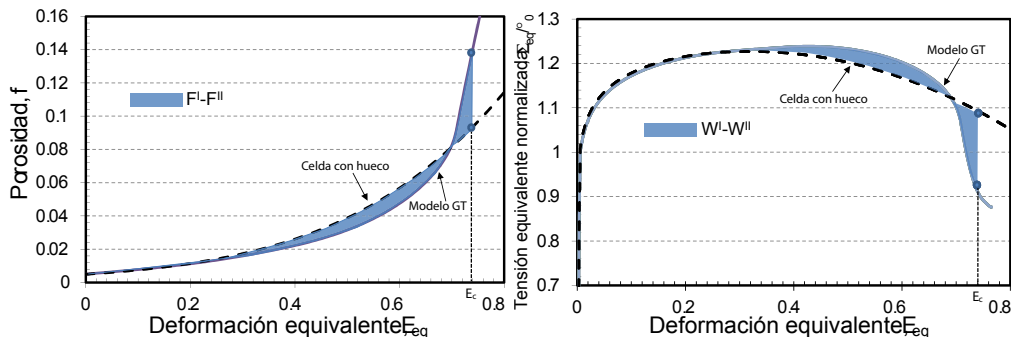


Fig. 5.6 Representación del ajuste realizado para las curvas $f-E_{eq}$ y $\Sigma_{eq}-E_{eq}$, con las funciones de error introducidas, $|F^I - F^{II}|$ y $|W^I - W^{II}|$

Siguiendo el trabajo de Aravas (1987), se utiliza un proceso de integración consistente para implementar las ecuaciones del modelo GT para el acero Weldox 960. Para ello, se emplea un algoritmo numérico implícito basado en el método de integración de Euler con diferencias hacia atrás. Dicho algoritmo, así como el operador tangente consistente utilizado, se implementan en el software comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014), a través de una subrutina de usuario UMAT.

Para una porosidad inicial y una triaxialidad dadas, diferentes pares de los valores de q_1 y q_2 dan el mismo resultado en las funciones de error de la ecuación (5.26): $R_f = \text{TOL}$ y $R_W = \text{TOL}$, con una tolerancia escogida $\text{TOL} = 0.01$. En la Figura 5.7 se muestran, para $f_0 = 0.005$, $T = 1$ y $L = -1$, el par de parámetros $q_1 - q_2$ que minimizan las funciones de error R_f y R_W . La elección óptima de los valores de q_1 y q_2 se obtiene en la intersección de ambas curvas, obteniendo en este caso los valores $q_1 = 0.855$ y $q_2 = 1.175$. Asimismo, y mediante el mismo procedimiento, en la Tabla 5.2 se presentan los parámetros óptimos del modelo GT para dos porosidades iniciales, $f_0 = 0.005$ y $f = 0.01$, y dos valores de triaxialidad, $T = 1$ y $T = 2$. También se presentan los valores de la deformación

5.3 Modelo Gurson-Tvergaard modificado con dependencia del parámetro de Lode

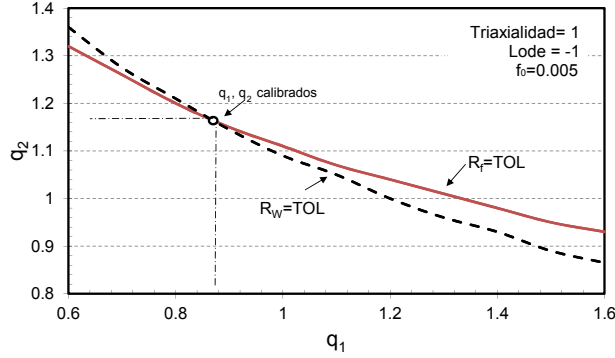


Fig. 5.7 Ejemplo del proceso de calibración de los parámetros q_1 y q_2 para $f_0 = 0.005$, $T = 1$ y $L = -1$

crítica de coalescencia obtenidos de la celda con hueco y necesarios para la el método de calibración.

Tabla 5.2 Valores óptimos de q_1 , q_2 y E_c para $L = -1$, $T = 1, 2$, $f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$

	$f_0 = 0.005$			$f_0 = 0.01$	
T	1	2		1	2
q_1	0.855	1.455		1.011	1.583
q_2	1.175	0.992		1.104	0.957
E_c	0.580	0.160		0.480	0.130

Para el rango de triaxialidad $1 \leq T \leq 2$, y a partir de los valores previamente calibrados de q_1 y q_2 , en el trabajo de Vadillo y Fernández-Sáez (2009) se propone una función polinómica cúbica dependiente de la triaxialidad para definir cada parámetro $q_i(T)$. En este caso, por cuestión de simplicidad, se asume una dependencia lineal,

$$q_i(T) = A_i T + B_i, \quad (5.27)$$

con unos coeficientes de interpolación A_i y B_i dados en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 Coeficientes de interpolación de la función $q_i(T)$ para $f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$

	$q_1(T)$			$q_2(T)$	
f_0	A_1	B_1		A_2	B_2
0.005	0.600	0.255		-0.183	1.358
0.01	0.572	0.439		-0.147	1.251

En la Figura 5.8 se comparan los resultados para una celda continua con modelo GT y celdas J_2 con hueco con diferentes valores de L , utilizando la evolución de la curva tensión-deformación macroscópica y el crecimiento del volumen de hueco hasta la

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

coalescencia. Se puede apreciar como el modelo clásico GT, que es independiente del parámetro de Lode, predice el mismo comportamiento para diferentes estados tensionales cuando la triaxialidad es la misma, mientras que la celda J_2 con hueco responde de manera diferente cuando el parámetro de Lode varía. Asimismo, se observa como, para cada caso de triaxialidad estudiado, la diferencia entre los dos modelos aumenta cuando se incrementa el valor del Lode.

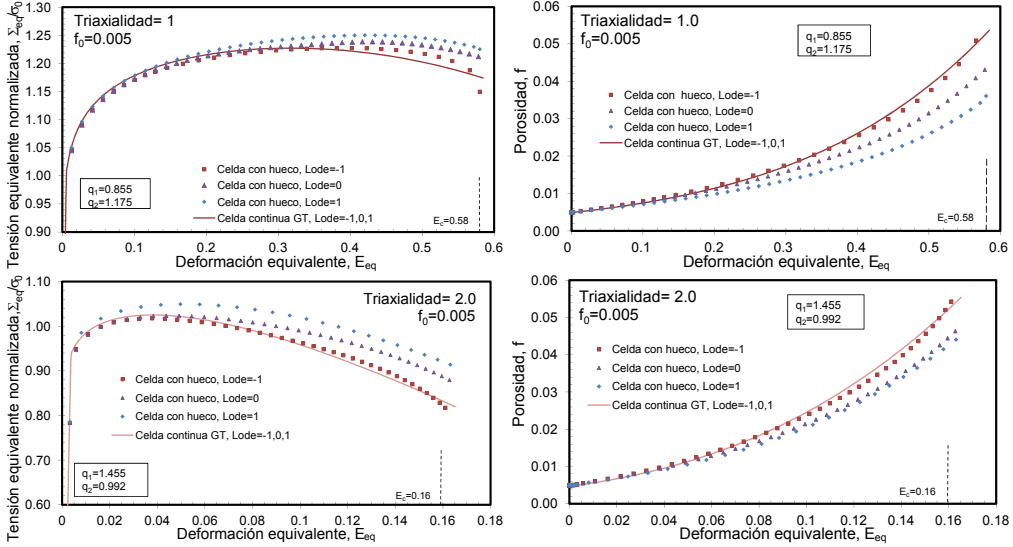


Fig. 5.8 Comparación de las curvas $\Sigma_{eq}-E_{eq}$ y $f-E_{eq}$ para una celda con hueco y una celda continua GT con diferentes parámetros q_i calibrados, para $T = 1, 2$, $f_0 = 0.005$ y $L = -1, 0, 1$

Con el objetivo de tener en cuenta la influencia del parámetro de Lode en el modelo GT, se introducen nuevas dependencias en los parámetros q_1 y q_2 , obteniendo la función de plastificación

$$\Phi_{mod}(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, T, \Omega, \bar{\sigma}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_{1mod}f \cosh\left(\frac{3q_{2mod}\Sigma_h}{2\bar{\sigma}}\right) - \left(1 + (q_{1mod})^2 f^2\right), \quad (5.28)$$

con q_{1mod} y q_{2mod} definidos como funciones lineales de T y Ω ,

$$\begin{aligned} q_{1mod}(T, \Omega) &= q_1(T) \cdot (1 + k_\Omega \Omega), \\ q_{2mod}(T, \Omega) &= q_2(T) \cdot (1 + k_\Omega \Omega). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Las funciones $q_1(T)$ y $q_2(T)$ siguen la expresión (5.27), con los coeficientes de interpolación A_i y B_i basados en el ajuste de los valores de los parámetros q_i obtenidos en el caso de un estado tensional axisimétrico ($L = -1$). A su vez, Ω es una componente tensional,

5.3 Modelo Gurson-Tvergaard modificado con dependencia del parámetro de Lode

función de la tensión equivalente Σ_{eq} y el tercer invariante J_3 ,

$$\Omega = \frac{27J_3}{2\Sigma_{eq}^3} - 1, \quad J_3 = \det(\Sigma'). \quad (5.30)$$

Existe una relación inversa entre Ω y el parámetro de Lode, la cual se puede ver en la Figura 5.9. El rango de valores que puede tomar Ω es $-2 \leq \Omega \leq 0$, con $\Omega = 0$ para $L = -1$ y $\Omega = -2$ para $L = 1$. A su vez, k_Ω es un parámetro de ajuste propuesto en este trabajo.

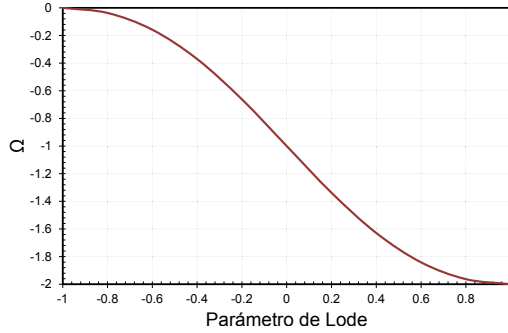


Fig. 5.9 Relación existente entre Ω y el parámetro de Lode

5.3.1 Convexidad de la superficie de plastificación

A causa de la introducción de estas funciones en los parámetros q_1 y q_2 del modelo GT, es necesario comprobar que se mantiene la convexidad de la superficie de plastificación. No obstante, no existe una regla matemática sencilla que permita asegurar dicha convexidad (Plesek et al., 2009). Siguiendo el trabajo de Pietryga et al. (2012), la superficie de plastificación sería convexa si las proyecciones de la superficie en los planos meridional (Σ_h - Σ_{eq}) y desviador son convexas para cualquier estado tensional. Utilizando este procedimiento, y para el material analizado, se ha asegurado la convexidad de las superficies de plastificación para un rango de valores de triaxialidad $1 \leq T \leq 2$, parámetro de Lode $-1 \leq L \leq 1$ y porosidades $f_0 \leq f \leq 0.08$, tanto para $f_0 = 0.005$ como para $f_0 = 0.01$, siempre que los valores de k_Ω estén comprendidos en el rango $0 \leq k_\Omega \leq 0.0403$. A nivel de ejemplo, en la Figura 5.10 se representa la forma geométrica de la función propuesta para $f_0 = 0.005$ y un valor de porosidad $f = 0.08$. En concreto, se representa en la Figura 5.10 la superficie de plastificación del modelo (5.28) en el plano $\Sigma_h/\bar{\sigma}$ - $\Sigma_{eq}/\bar{\sigma}$ y en el plano desviador de Haigh-Westergaard.

Se utilizan dos valores de k_Ω en las representaciones: $k_\Omega = 0$ y $k_\Omega = 0.04$. En el caso igual a cero, se recupera la función del modelo GT original, sin dependencia del parámetro de Lode. En la representación, se observa que las mayores diferencias para

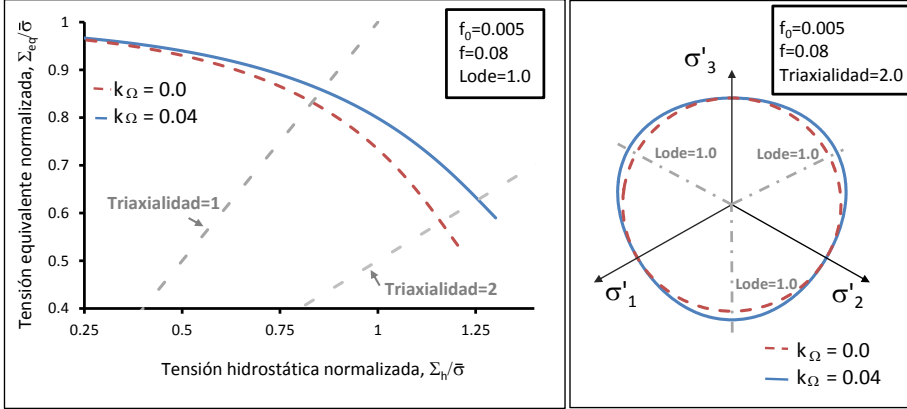


Fig. 5.10 Representación de la función de plastificación del modelo GT modificado en los planos $\Sigma_h/\bar{\sigma}$ - $\Sigma_{eq}/\bar{\sigma}$ y en el plano desviador para $k_\Omega = 0$ y $k_\Omega = 0.04$ y $f_0 = 0.005$

los distintos valores de k_Ω utilizados se producen para el valor más alto de triaxialidad ($T = 2$) y cuando el parámetro de Lode es también el más elevado ($L = 1$).

5.3.2 Ecuaciones constitutivas del modelo propuesto

Para materiales hipoeásticos-plásticos, la relación entre la variación temporal de la tensión macroscópica $\dot{\Sigma}$ y la parte plástica de la velocidad de deformación macroscópica $\dot{\mathbf{E}}^p$, viene dada por la expresión

$$\dot{\Sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p), \quad (5.31)$$

siendo $\dot{\mathbf{E}}$ el tensor de velocidades de deformación macroscópicas y \mathbf{C} el tensor elástico isótropo lineal de cuarto orden ($\mathbf{C} = 2G\mathbf{I}' + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$). A su vez, G y K son el módulo de cortadura y el módulo de compresibilidad, respectivamente. \mathbf{I}' es el tensor desviador unitario de cuarto orden y $\mathbf{1}$ el tensor unitario de segundo orden.

La parte plástica de la velocidad de deformación macroscópica $\dot{\mathbf{E}}^p$ deriva de la regla de flujo asociada,

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma}, \quad (5.32)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el multiplicador plástico definido como

$$\dot{\lambda} = \frac{(1-f)\bar{\sigma}\dot{\varepsilon}}{\Sigma : \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma}} \quad (5.33)$$

y Φ_{mod} es la función de plastificación GT modificada en este trabajo, que tiene en cuenta la influencia del parámetro de Lode en el comportamiento dúctil de materiales porosos elastoplásticos. Asimismo, $\dot{\mathbf{E}}^p$ y la velocidad deformación plástica equivalente $\dot{\varepsilon}^p$ se

relacionan aplicando la igualdad de trabajo plástico de la matriz y el macroscópico,

$$\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p = (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p. \quad (5.34)$$

A su vez, el límite elástico del material de la matriz $\bar{\sigma}$ y la velocidad deformación plástica equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}^p$, se relacionan a través de la ley $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p)$ con $\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^p(\tau) d\tau$.

La evolución de la porosidad, teniendo en cuenta únicamente el crecimiento de huecos, se puede expresar como

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\mathbf{E}}^p : \mathbf{1}. \quad (5.35)$$

Cabe destacar, que la ley de evolución de la porosidad es afectada por la definición de la superficie de plastificación y, por lo tanto, también tiene dependencia con el parámetro de Lode.

Y para completar la formulación presentada, es necesario considerar las condiciones de Kuhn-Tucker de carga-descarga,

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \Phi_{mod} \leq 0, \quad \dot{\lambda} \Phi_{mod} = 0, \quad (5.36)$$

y la condición de consistencia durante la plastificación $\dot{\Phi}_{mod} = 0$.

5.4 Implementación numérica del modelo

En el contexto del método de los elementos finitos, el procedimiento de integración espacial se realiza de forma local, es decir, en cada punto de cuadratura de los elementos finitos. La integración incremental de las ecuaciones constitutivas es un proceso dominado por la deformación, donde el tensor de deformaciones totales \mathbf{E} en cada punto de integración es conocido en cada instante de tiempo n y tanto el tensor de tensiones como las variables de estado deben ser actualizadas en el instante $n + 1$.

Con el fin de integrar el conjunto de ecuaciones constitutivas no lineales de las ecuaciones (5.31-5.36), se deben llevar a cabo dos tareas. La primera está relacionada con la actualización de la tensión y de las variables de estado, dadas por el incremento de deformación. La segunda tarea consiste en definir un operador tangente consistente para preservar la convergencia cuadrática de los esquemas de solución iterativos basados en el método de Newton-Raphson y reducir notablemente el tiempo de resolución del problema.

En la primera etapa, se utiliza un algoritmo de retorno radial clásico (Simo y Taylor, 1985). Siguiendo un esquema de integración implícito *Euler hacia atrás* (Backward Euler), las ecuaciones constitutivas pueden convertirse en forma incremental, quedando de la siguiente manera:

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

- Relación entre las tensiones de Cauchy y deformaciones macroscópicas (ecuación (5.31)),

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{trial} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta E}^p \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\Sigma}^{trial} = \boldsymbol{\Sigma}_{(n)} + \mathbf{C} : \boldsymbol{\Delta E}. \quad (5.37)$$

- Regla de normalidad (ecuación (5.32)), desacoplando en las componentes tensionales (hidrostática, desviadora y parámetro Ω),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta E}^p = \Delta\lambda \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \Delta\lambda \left(\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_h} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_h} \right) \mathbf{1} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \frac{3\boldsymbol{\Sigma}'}{2\Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \right), \end{aligned} \quad (5.38)$$

con

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{81}{2} \frac{J_3}{\Sigma_{eq}^4} \cdot \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}'}{\Sigma_{eq}} + \frac{27}{2\Sigma_{eq}^3} \left(\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') + \frac{1}{9} \Sigma_{eq}^2 \mathbf{1} \right), \quad (5.39)$$

siendo $\mathbf{1}$ el tensor unitario de segundo orden y $\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}')$ la matriz de cofactores de $\boldsymbol{\Sigma}'$. Del mismo modo, la regla de normalidad puede escribirse en función de las variables $\Delta\varepsilon_p$, $\Delta\varepsilon_q$ y $\Delta\varepsilon_\Omega$,

$$\boldsymbol{\Delta E}^p = \Delta\lambda \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_p \mathbf{1} + \Delta\varepsilon_q \frac{3\boldsymbol{\Sigma}'}{2\Sigma_{eq}} + \Delta\varepsilon_\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \quad (5.40)$$

donde $\Delta\varepsilon_p$, $\Delta\varepsilon_q$ y $\Delta\varepsilon_\Omega$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_p &= \Delta\lambda \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_h} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_h} \right), \\ \Delta\varepsilon_q &= \Delta\lambda \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_{eq}} \right), \\ \Delta\varepsilon_\Omega &= \Delta\lambda \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Omega} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones de (5.41) se puede eliminar $\Delta\lambda$, obteniéndose

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_p \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_e} \right) - \Delta\varepsilon_q \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_h} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_h} \right) &= 0, \\ \Delta\varepsilon_q \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Omega} - \Delta\varepsilon_\Omega \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

- Equivalencia de trabajo plástico macroscópico y microscópico (ecuación (5.34)),

$$\Sigma_h \Delta\varepsilon_p + \Sigma_{eq} \Delta\varepsilon_q = (1 - f) \bar{\sigma} \Delta \bar{\varepsilon}^p. \quad (5.43)$$

- Evolución de la fracción de hueco (ecuación (5.35)),

$$\Delta f = (1 - f) \Delta \varepsilon_p \quad (5.44)$$

- Condición de Kuhn-Tucker de carga-descarga plástica (ecuación (5.36)),

$$\Delta \Phi_{mod} = 0 \quad (5.45)$$

Entonces, introduciendo la ecuación (5.40) en la parte desviadora de la ecuación (5.37), la expresión actualizada de la tensión desviadora es

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} - 3G\Delta\varepsilon_q \frac{\boldsymbol{\Sigma}'}{\Sigma_{eq}} - 2G\Delta\varepsilon_\Omega \left(-\frac{81}{2} \frac{J_3}{\Sigma_{eq}^4} \cdot \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma}'}{\Sigma_{eq}} + \frac{27}{2\Sigma_{eq}^3} \left(\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') + \frac{1}{9} \Sigma_{eq}^2 \mathbf{1} \right) \right), \quad (5.46)$$

con

$$\boldsymbol{\Sigma}'^{trial} = \boldsymbol{\Sigma}'_{(n)} + 2G\mathbf{I}' : \boldsymbol{\Delta E}, \quad (5.47)$$

donde, a su vez, $\boldsymbol{\Sigma}'$ puede ser escrito como

$$X\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} - Y\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') - Z\mathbf{1}, \quad (5.48)$$

con X , Y y Z dados por

$$X = 1 + \frac{3G}{\Sigma_{eq}} \Delta\varepsilon_q - \frac{243G J_3}{2\Sigma_{eq}^5} \Delta\varepsilon_\Omega, \quad Y = \frac{27G}{\Sigma_{eq}^3} \Delta\varepsilon_\Omega \quad \text{y} \quad Z = \frac{\Sigma_{eq}^2 Y}{9}, \quad (5.49)$$

y $\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}')$, calculado desde la expresión dada en (5.48),

$$(X^2 - YZ)\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') = \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial}) - (2XZ + Y^2 J_3) \boldsymbol{\Sigma}' + (XY J_3 + 2Z^2) \mathbf{1}. \quad (5.50)$$

A partir de la ecuación (5.46), y después de operar de manera algebraica, teniendo en cuenta las identidades

$$(\boldsymbol{\Sigma}') : \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') = 3J_3 \quad (5.51)$$

y

$$\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') : \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') = \frac{\Sigma_{eq}^4}{9} \quad \text{y} \quad \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') : \mathbf{1} = -\frac{\Sigma_{eq}^2}{3}, \quad (5.52)$$

se pueden conseguir las siguientes relaciones entre la tensión *trial* y la actual,

$$\begin{aligned} (\Sigma_{eq}^{trial})^2 &= (\Sigma_{eq} + 3G\Delta\varepsilon_q)^2 + \left(\frac{9G\Delta\varepsilon_\Omega}{\Sigma_{eq}} \right)^2 (1 - (\Omega + 1)^2), \\ J_3^{trial} &= \frac{2\Sigma_{eq}^3}{27} \left[(\Omega + 1) X^3 + \frac{(Y\Sigma_{eq})^3}{27} (2(\Omega + 1)^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + X^2 (Y\Sigma_{eq}) + \frac{(\Omega + 1) X}{3} (Y\Sigma_{eq})^2 \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

con $\Sigma_{eq}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma'^{trial} : \Sigma'^{trial}}$, $J_3^{trial} = \det(\Sigma'^{trial})$ y

$$X = 1 + \frac{3G}{\Sigma_{eq}} \Delta \varepsilon_q - \frac{9G(\Omega + 1)}{\Sigma_{eq}^2} \Delta \varepsilon_\Omega, \quad Y = \frac{27G}{\Sigma_e^3} \Delta \varepsilon_\Omega. \quad (5.54)$$

De una forma similar, se puede probar de manera sencilla la relación

$$\Sigma_h^{trial} = \Sigma_h + K \Delta \varepsilon_p. \quad (5.55)$$

Por lo tanto, con el objetivo de obtener el valor de las cinco incógnitas $\Delta \varepsilon_p$, $\Delta \varepsilon_q$, $\Delta \varepsilon_\Omega$, f y $\bar{\varepsilon}^p$, se resuelve mediante un método iterativo de Newton-Raphson el conjunto de cinco ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_p \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) - \Delta \varepsilon_q \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_h} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_h} \right) &= 0, \\ \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Omega} - \Delta \varepsilon_\Omega \left(\frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi_{mod}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) &= 0, \\ \Sigma_h \Delta \varepsilon_p + \Sigma_{eq} \Delta \varepsilon_q &= (1 - f) \bar{\sigma} \Delta \bar{\varepsilon}^p, \\ \Delta f &= (1 - f) \Delta \varepsilon_p, \\ \Phi_{mod}(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, T, \Omega, \bar{\sigma}, f) &= 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$. Σ_h , Σ_{eq} y Ω se obtienen de las relaciones

$$\begin{aligned} \Sigma_h &= \Sigma_h^{trial} - K \Delta \varepsilon_p, \\ (\Sigma_{eq} + 3G \Delta \varepsilon_q)^2 + \left(\frac{9G \Delta \varepsilon_\Omega}{\Sigma_{eq}} \right)^2 (1 - (\Omega + 1)^2) &= (\Sigma_{eq}^{trial})^2, \\ \frac{27 \Sigma_{eq}^3}{27} \left[(\Omega + 1) X^3 + \frac{(Y \Sigma_{eq})^3}{27} (2(\Omega + 1)^2 - 1) + X^2 (Y \Sigma_{eq}) + \frac{(\Omega + 1) X}{3} (Y \Sigma_{eq})^2 \right] &= J_3^{trial}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

con X e Y dados en la ecuación (5.54).

Una vez que el conjunto de ecuaciones de la expresión (5.56) es resuelto, las ecuaciones (5.48) y (5.50) permiten que Σ' sea escrito como una función del tensor $\mathbf{1}$ y de los tensores de prueba Σ'^{trial} y $\text{cof}(\Sigma'^{trial})$.

Finalmente, la tensión actualizada Σ en el instante de tiempo $n+1$ puede ser calculada como $\Sigma = \Sigma_h \mathbf{1} + \Sigma'$.

5.4.1 Operador tangente consistente

En la resolución de problemas elastoplásticos, la consistencia entre el algoritmo de integración utilizado en la solución del problema incremental y el operador tangente \mathbf{J} tiene un papel determinante (Simo y Taylor, 1985). El valor de dicho operador tangente depende del algoritmo empleado para la integración de las ecuaciones. En el caso del

esquema de solución iterativo usado en este trabajo, el cual está basado en el método de Newton-Raphson, la utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática del método de solución. El operador tangente consistente \mathbf{J} se define como la relación entre las derivadas del tensor de tensiones y el tensor de deformaciones totales en el instante de tiempo $n + 1$,

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} \right)_{(n+1)}. \quad (5.58)$$

Para materiales definidos con el modelo GT clásico, el operador tangente consistente con el método de integración de Euler con diferencias hacia atrás ha sido propuesto y utilizado en conjunción con el método iterativo de Newton-Raphson por diferentes autores (Aravas, 1987; Vadillo y Fernández-Sáez, 2009; Zhang, 1995). Siguiendo este procedimiento, se formula, como novedad en este trabajo, el operador tangente consistente para un modelo GT dependiente del tercer invariante J_3 .

Cabe destacar, que debido a que todos los valores de las expresiones posteriores se refieren al instante de tiempo $n + 1$, se omite este subíndice por simplicidad. Por conveniencia de implementación, \mathbf{J} se deriva en forma de matriz. Los símbolos resaltados en negrita se utilizan para denotar matrices y vectores. Por lo tanto, las derivadas del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones se definen como

$$\begin{aligned} \partial \boldsymbol{\Sigma} &= \{\partial \Sigma_{11}, \partial \Sigma_{22}, \partial \Sigma_{33}, \partial \Sigma_{12}, \partial \Sigma_{13}, \partial \Sigma_{23}, \partial \Sigma_{21}, \partial \Sigma_{31}, \partial \Sigma_{32}\}^T, \\ \partial \mathbf{E} &= \{\partial E_{11}, \partial E_{22}, \partial E_{33}, \partial E_{12}, \partial E_{13}, \partial E_{23}, \partial E_{21}, \partial E_{31}, \partial E_{32}\}^T. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Entonces, derivando las ecuaciones de (5.37), y considerando la relación dada en la ecuación (5.55), se obtiene la expresión

$$\partial \boldsymbol{\Sigma} = \partial \Sigma_h \mathbf{1} + \partial \boldsymbol{\Sigma}' = \partial \Sigma_h^{trial} \mathbf{1} - K \partial \Delta \varepsilon_p \mathbf{1} + \partial \boldsymbol{\Sigma}'. \quad (5.60)$$

Asimismo, derivando la ecuación (5.48) se obtiene

$$\boldsymbol{\Sigma}' \partial X + X \partial \boldsymbol{\Sigma}' = \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} - \partial Y \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}') - Y \partial (\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}')) - \partial Z \mathbf{1}, \quad (5.61)$$

donde ∂X , ∂Y y ∂Z son función de $\partial \Sigma_h^{trial}$, $\partial \Sigma_e^{trial}$ y ∂J_3^{trial} , y $\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}')$ y $\partial (\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'))$ son función de $\boldsymbol{\Sigma}'^{trial}$ y $\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})$ (ver Anexo B). A partir de las relaciones anteriores y despejando $\partial \boldsymbol{\Sigma}'$ de la ecuación (5.61) se tiene que

$$\partial \boldsymbol{\Sigma}' = \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} + \tilde{E}_1 \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} + \tilde{E}_2 \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial}) + \tilde{E}_3 \mathbf{1} + F \partial (\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})), \quad (5.62)$$

con \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 y \tilde{E}_3 de la forma

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_{i1} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{E}_{i2} \partial \Sigma_e^{trial} + \tilde{E}_{i3} \partial J_3^{trial}, \quad (5.63)$$

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

y siendo conocidos todos los coeficientes \tilde{E}_{ij} y F .

Finalmente, introduciendo la relación (ver Anexo B)

$$\partial \Delta \varepsilon_p = \tilde{B}_{11} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{B}_{12} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{B}_{13} \partial J_3^{trial}, \quad (5.64)$$

y las identidades

$$\begin{aligned} \partial \Sigma_h^{trial} &= K (\mathbf{1})^T \cdot \partial \mathbf{E}, \\ \partial \Sigma_e^{trial} &= \frac{3}{2 \Sigma_e^{trial}} (\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})^T \cdot \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial}, \\ \partial J_3^{trial} &= (\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial}))^T \cdot \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial}, \\ \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} &= 2G \mathbf{I}' \cdot \partial \mathbf{E}, \\ \partial (\text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})) &= \mathbf{M} \cdot \partial \boldsymbol{\Sigma}'^{trial}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

donde G y K son las constantes elásticas del material y \mathbf{M} la matriz 9x9:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{33}^{trial} & \Sigma_{22}^{trial} & 0 & 0 & -\Sigma_{32}^{trial} & 0 & 0 & -\Sigma_{23}^{trial} \\ \Sigma_{33}^{trial} & 0 & \Sigma_{11}^{trial} & 0 & -\Sigma_{31}^{trial} & 0 & 0 & -\Sigma_{13}^{trial} & 0 \\ \Sigma_{22}^{trial} & \Sigma_{11}^{trial} & 0 & -\Sigma_{21}^{trial} & 0 & 0 & -\Sigma_{12}^{trial} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_{21}^{trial} & 0 & 0 & \Sigma_{31}^{trial} & -\Sigma_{33}^{trial} & \Sigma_{23}^{trial} & 0 \\ 0 & -\Sigma_{31}^{trial} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{32}^{trial} & -\Sigma_{22}^{trial} & \Sigma_{21}^{trial} \\ -\Sigma_{32}^{trial} & 0 & 0 & \Sigma_{31}^{trial} & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{12}^{trial} & -\Sigma_{11}^{trial} \\ 0 & 0 & -\Sigma_{12}^{trial} & -\Sigma_{33}^{trial} & \Sigma_{32}^{trial} & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{13}^{trial} \\ 0 & -\Sigma_{13}^{trial} & 0 & \Sigma_{23}^{trial} & -\Sigma_{22}^{trial} & \Sigma_{12}^{trial} & 0 & 0 & 0 \\ -\Sigma_{23}^{trial} & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{21}^{trial} & -\Sigma_{11}^{trial} & \Sigma_{13}^{trial} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Con todo ello, agrupando términos y operando, el operador tangente consistente puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= K (1 - K \tilde{B}_{11} + \tilde{E}_{31}) \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T + K \tilde{E}_{21} \cdot \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial}) \cdot \mathbf{1}^T \\ &+ \frac{3G}{\Sigma_{eq}^{trial}} (\tilde{E}_{12} \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} + \tilde{E}_{22} \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})) \cdot (\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})^T \\ &+ 2G (\tilde{E}_{13} \boldsymbol{\Sigma}'^{trial} + \tilde{E}_{23} \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})) \cdot \mathbf{I}' \cdot \text{cof}(\boldsymbol{\Sigma}'^{trial})^T + 2G (\mathbf{I}' + F \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}'). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Este operador tangente consistente es, en general, no simétrico y para definirlo, no es necesario invertir ninguna matriz. Asimismo, tanto el algoritmo de integración descrito como el operador tangente consistente han sido implementados en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014), a través de una subrutina de usuario UMAT.

5.5 Análisis numérico de celdas tridimensionales con material GT dependiente del parámetro de Lode

Con el objetivo de analizar la precisión del modelo propuesto, en este apartado se estudia el comportamiento del material Weldox 960 utilizando el modelo GT extendido, sometido a diferentes estados de carga. Para ello, se analizan los resultados obtenidos de la tensión equivalente macroscópica normalizada (Σ_{eq}/σ_0) y de la porosidad frente a la deformación macroscópica equivalente, comparándolos con los conseguidos en la celda J_2 con hueco. Esto se lleva a cabo mediante dos procedimientos diferentes de aplicación del estado de carga. En el primero de ellos, se prescribe el estado tensional de la celda mediante valores constantes de triaxialidad y parámetro de Lode. Por el contrario, en el segundo procedimiento se prescriben valores de T y L variables, dependientes de la deformación equivalente.

5.5.1 Prescripción de triaxialidad y parámetro de Lode constante

En esta parte del análisis se consideran dos valores de porosidad inicial ($f_0 = 0.005$ y $f_0 = 0.01$), dos valores prescritos de triaxialidad ($T = 1$ y $T = 2$) y dos valores prescritos del parámetro de Lode ($L = 0$ y $L = 1$), todo ello en el intervalo de deformaciones $0 \leq E_{eq} \leq E_c$, donde E_c es la deformación de coalescencia. Cabe destacar, que el caso correspondiente a $L = -1$ no tiene sentido analizarlo porque las celdas con y sin hueco tendrían un comportamiento casi coincidente, ya que los parámetros $q_1(T)$ y $q_2(T)$ han sido calibrados para tal fin.

En primer lugar, en la Figura 5.11 se muestran los resultados para $T = 1$ y $L = 0$, y para las dos porosidades iniciales propuestas, considerando el modelo de celda J_2 con hueco (línea formada por triángulos) y el modelo de celda homogénea y material GT con dependencia del parámetro de Lode. Las curvas de la gráficas se representan hasta alcanzar el valor de deformación de coalescencia E_c de la tabla 5.2 y, en ellas, se enfrentan la tensión macroscópica equivalente normalizada con el límite elástico inicial y la porosidad, frente a la deformación macroscópica equivalente. Los valores de k_Ω de las ecuaciones en (5.29) que se han utilizado en el modelo son $k_\Omega = 0$, donde se recupera el modelo GT sin dependencia del tercer invariante, $k_\Omega = 0.01$, $k_\Omega = 0.03$ y $k_\Omega = 0.04$. A su vez, los parámetros $q_i(T)$ empleados vienen determinados por el ajuste de la ecuación (5.27) para $T = 1$ y $L = -1$ ($q_1 = 0.855$ y $q_2 = 1.175$ para $f_0 = 0.005$, y $q_1 = 1.011$ y $q_2 = 1.104$ para $f_0 = 0.01$). Se puede observar que la respuesta del material es notablemente diferente cuando se modifica el valor de k_Ω . En el caso de $k_\Omega = 0$ (línea rosa discontinua), la curva tensión-deformación del modelo propuesto se encuentra por debajo de la correspondiente al modelo J_2 y la curva de la evolución de la porosidad se encuentra por encima. No obstante, en el caso de $k_\Omega = 0.04$ ocurre justo lo contrario, lo que indica que una elección adecuada del parámetro k_Ω permite ajustar el

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

comportamiento de la celda homogénea. En este caso, el valor que aproxima mejor el comportamiento del material para el estado de carga analizado corresponde a $k_\Omega = 0.03$.

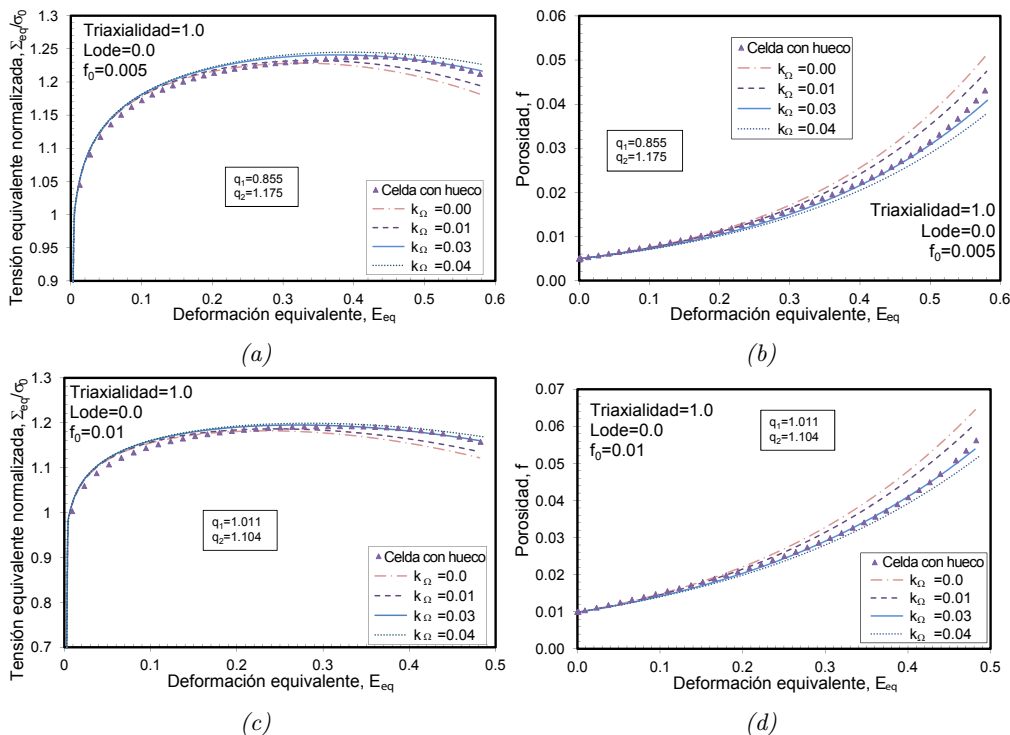


Fig. 5.11 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 1$ y $L = 0$

En la figura 5.12 se presentan las curvas correspondientes a los valores prescritos $T = 1$ y $L = 1$, y para las dos porosidades iniciales propuestas, considerando de nuevo el modelo de celda J_2 con hueco (línea formada por triángulos) y el modelo de celda homogénea y material GT con dependencia del parámetro de Lode. Al igual que en el caso anterior, las gráficas muestran que con una elección apropiada del parámetro k_Ω se pueden ajustar las curvas del modelo propuesto a las obtenidos para la celda con hueco, tanto en la respuesta de la tensión como en la evolución de la porosidad. Asimismo, el valor más óptimo en este caso vuelve a ser $k_\Omega = 0.03$.

A su vez, en las Figuras 5.13 y 5.14 se muestran los resultados para $T = 2$ y dos valores del parámetro de Lode, respectivamente ($L = 0$ y $L = 1$). En estos casos, los parámetros $q_i(T)$ empleados vienen determinados por el ajuste de la ecuación (5.27) para $T = 2$ y $L = -1$ ($q_1 = 1.455$ y $q_2 = 0.992$ para $f_0 = 0.005$, y $q_1 = 1.583$ y $q_2 = 0.957$ para $f_0 = 0.01$). El valor del parámetro k_Ω que mejor reproduce el comportamiento de la celda con hueco para el valor de $L = 0$ es $k_\Omega = 0.03$ y en el caso de $L = 1$, el valor óptimo estaría dentro del rango $k_\Omega = (0.01, 0.03)$.

5.5 Análisis numérico de celdas tridimensionales con material GT dependiente del parámetro de Lode

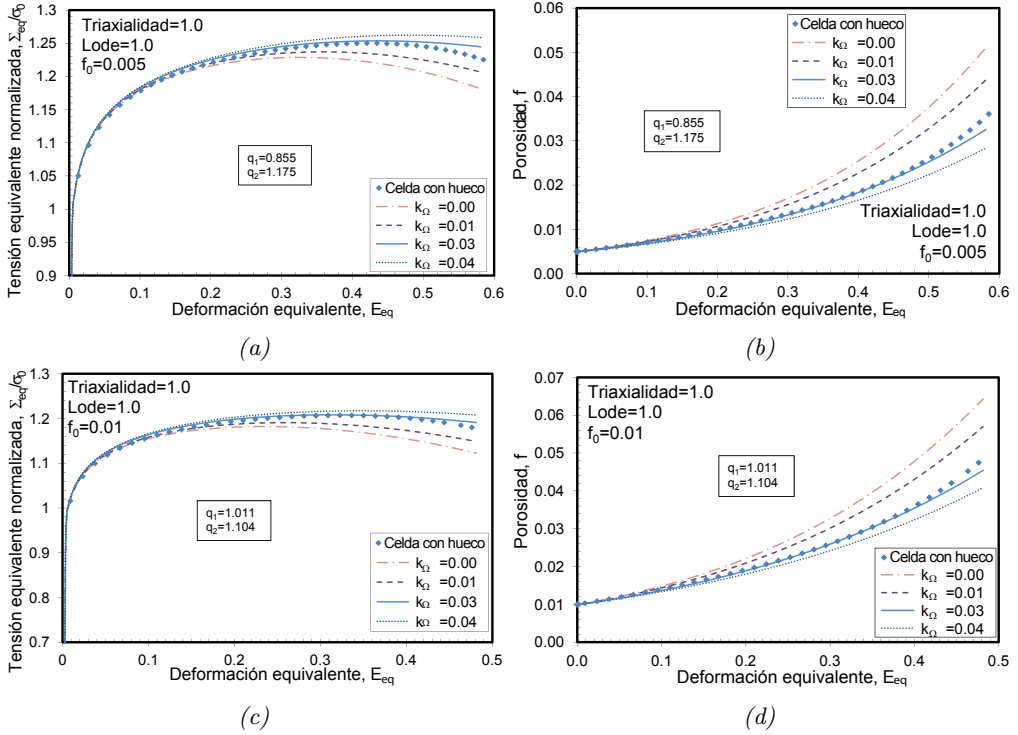


Fig. 5.12 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 1$ y $L = 1$

Por lo tanto, se puede decir que la mejora del modelo GT propuesta en este capítulo, que también tiene en cuenta la influencia del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras J_3 , es capaz de reproducir de manera más precisa el comportamiento dúctil del material analizado que en el caso de los modelos GT tradicionales.

5.5.2 Prescripción de triaxialidad y parámetro de Lode variable

Con el fin de analizar el comportamiento del modelo propuesto en un estado de carga macroscópico más general, en este apartado se propone prescribir los valores de triaxialidad y parámetro de Lode en las celdas homogénea y con hueco a un valor variable dependiente de la deformación macroscópica equivalente E_{eq} , siguiendo funciones de la forma

$$\begin{aligned} T &= 1 + 25E_{eq} - 156.25E_{eq}^2, \\ L &= 1 - 50E_{eq} + 312.5E_{eq}^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

en un rango de deformación $0 \leq E_{eq} \leq 0.16$. Por lo tanto, las funciones propuestas en (5.68) permiten evaluar la capacidad predictiva del modelo cuando la triaxialidad

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

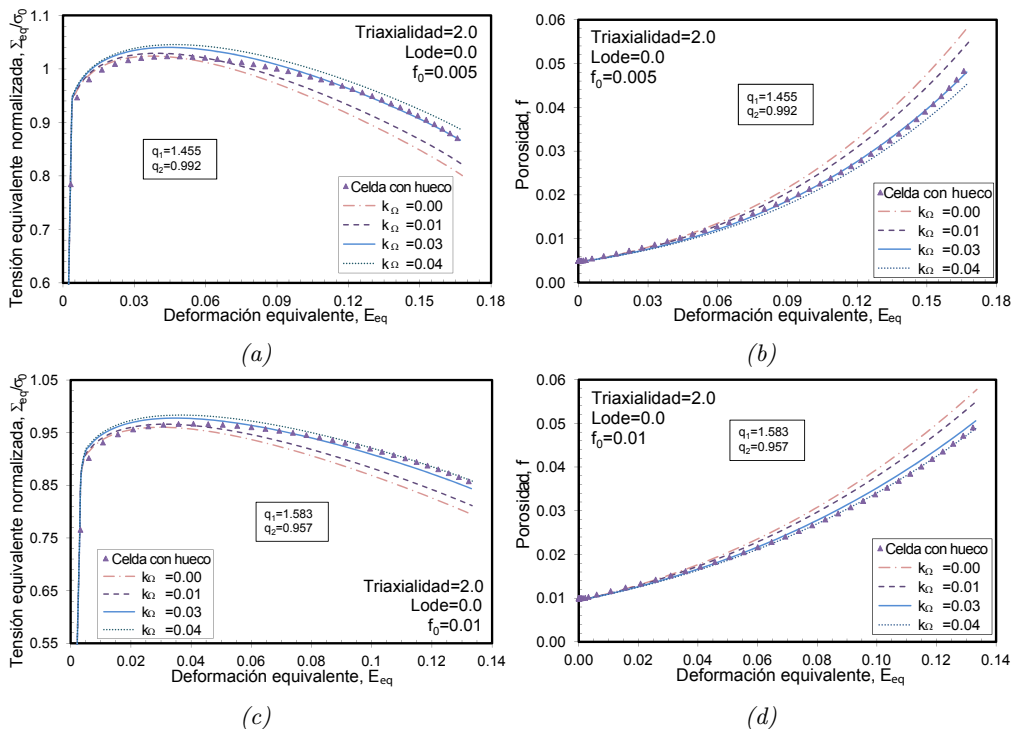


Fig. 5.13 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 2$ y $L = 0$

varia entre los valores $1 \leq T \leq 2$ y cuando el parámetro de Lode varía entre los valores $-1 \leq L \leq 1$ (ver Figura 5.15).

En la Figura 5.16 se puede ver la evolución de la tensión macroscópica equivalente y la porosidad frente a la deformación equivalente, de las celdas con y sin hueco, cuando la triaxialidad y el parámetro de Lode son prescritos mediante las ecuaciones (5.68) para una porosidad inicial $f_0 = 0.005$. En este caso, se ha asegurado que el valor crítico de coalescencia no se alcanza en ninguno de los valores de deformación analizados. Asimismo, en el modelo de celda sin hueco se han considerado tres combinaciones diferentes de parámetros q_1 y q_2 . En primer lugar, se utiliza un modelo GT clásico con dos valores constantes de los parámetros, $q_1 = 1.25$ y $q_2 = 1.0$. Por otra parte, también se representan dos casos en los que se han empleado el modelo GT extendido con parámetros dependientes de la triaxialidad, a través del ajuste polinómico lineal de la expresión (5.27), y del parámetro de Lode mediante k_Ω (ecuación (5.29)).

A la vista de los resultados obtenidos, se puede concluir que de nuevo el modelo GT extendido con dependencia de la triaxialidad y el parámetro de Lode, con $k_\Omega = 0.04$, reproduce mejor el comportamiento de la celda J_2 con hueco, cuando es comparado con

5.5 Análisis numérico de celdas tridimensionales con material GT dependiente del parámetro de Lode

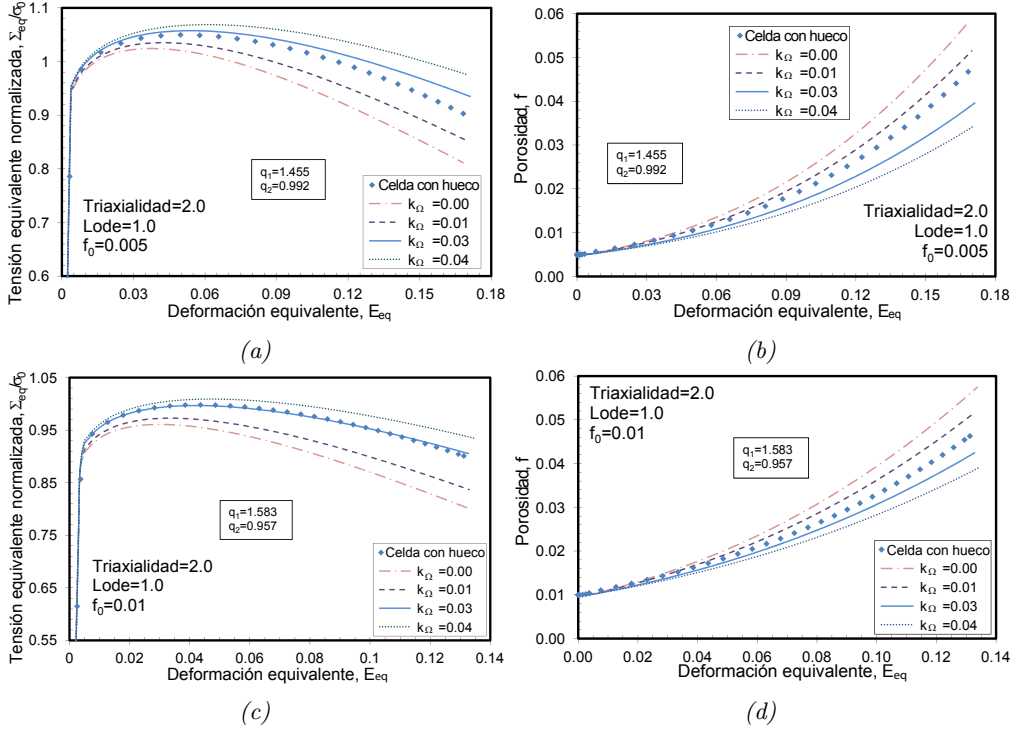


Fig. 5.14 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.005$ en (a) y (b) y para $f_0 = 0.01$ en (c) y (d), con los valores prescritos $T = 2$ y $L = 1$

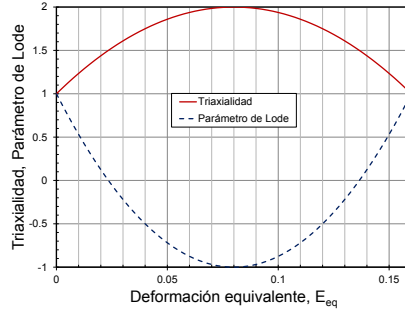


Fig. 5.15 Variación cuadrática propuesta para T y L

el modelo que solo tiene dependencia con la triaxialidad ($k_\Omega = 0$) y con el modelo GT clásico, con parámetros constantes $q_1 = 1.25$ y $q_2 = 1.0$.

Extensión del modelo de Gurson incluyendo dependencia con el parámetro de Lode a altas triaxialidades

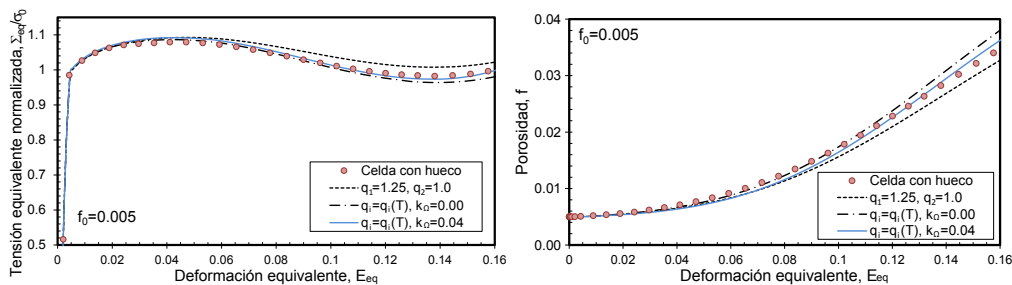


Fig. 5.16 Evolución de la tensión macroscópica equivalente y la fracción de volumen del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente para $f_0 = 0.05$, con los valores variables de T y L

5.6 Resumen y conclusiones

En este capítulo se propone una mejora del modelo Gurson-Tvergaard clásico que tiene en cuenta tanto la triaxialidad T como la influencia del tercer invariante del tensor de tensores desviadoras J_3 . Para ello, en primer lugar se ha demostrado que el modelo GT no es capaz de recoger el comportamiento de un material cuando hay variación en el parámetro de Lode. Esto se ha logrado mediante la utilización de dos modelos diferentes: una celda cúbica tridimensional con un hueco esférico y material J_2 , y una celda cúbica tridimensional homogénea con el modelo GT clásico implementado.

Una vez demostrada la necesidad de mejorar el modelo GT, se ha propuesto una modificación que tiene en cuenta la influencia del parámetro de Lode. La nueva dependencia se introduce en los parámetros de ajuste q_1 y q_2 , que pasan de ser constantes a ser función de la triaxialidad y del parámetro de Lode. Cabe destacar, que se ha comprobado que se mantiene la convexidad de la superficie de plastificación propuesta en todo momento. Asimismo, se presenta una implementación numérica de las ecuaciones constitutivas del modelo propuesto mediante un esquema tipo Euler con diferencias hacia atrás implícito en todas las variables, ayudado por la formulación de un operador tangente consistente con el objetivo de preservar la convergencia del esquema de resolución. Tanto el algoritmo de integración, como el operador tangente consistente, se han implementado en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard, mediante el uso de una subrutina de usuario tipo UMAT. Además, en este capítulo se ha desarrollado una extensión del método utilizado por Faleskog et al. (1998) para prescribir tanto la triaxialidad como el parámetro de Lode aplicado en la celda unitaria, mediante la aplicación de las condiciones de contorno adecuadas.

Para finalizar, con el objetivo de validar el modelo propuesto se han comparado los resultados obtenidos para la celda homogénea y la celda con hueco y material J_2 en casos con triaxialidades y parámetros de Lode prescritos a valores constantes y variables. En concreto, se han comparado las representaciones de la tensión macroscópica equivalente normalizada y la porosidad frente a la deformación macroscópica equivalente. De los

resultados obtenidos se ha llegado a la conclusión de que la mejora del modelo GT propuesta en esta tesis doctoral, que también tiene en cuenta la influencia del tercer invariante del tensor de tensiones desviadoras J_3 , es capaz de reproducir de manera más precisa el comportamiento dúctil del material analizado que en el caso de los modelos GT tradicionales y permite ampliar su aplicabilidad a cualquier estado tensional tridimensional.

6

Interacción entre la localización macroscópica y la coalescencia de huecos en materiales viscoplásticos

En este capítulo se analiza la interacción que se produce entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales dúctiles con dependencia de la velocidad de deformación. Para ello, se desarrolla una metodología numérica original, basada en modelos tridimensionales de celda unitaria con huecos esféricos en su interior capaces de captar el fenómeno de localización y de coalescencia, teniendo en cuenta el estado tensional aplicado y el ángulo de orientación de la banda de localización.

6.1 Introducción

En las últimas décadas se ha realizado un gran progreso en el conocimiento y modelización de los efectos micromecánicos que gobiernan el fenómeno de fractura dúctil en materiales metálicos porosos sometidos a estados complejos de carga. No obstante, en la literatura parece existir cierta confusión entre los dos modos de localización del flujo plástico que se producen durante la fractura dúctil. El primero de ellos consiste en la denominada localización macroscópica, la cual está ligada al efecto del ablandamiento debido a la nucleación y crecimiento de microvacíos, dando lugar a una gran irregularidad en la deformación producida en el material que localiza en una banda delgada, con un espesor comparable a la distancia entre huecos. El segundo modo se denomina coalescencia y tiene lugar cuando la deformación plástica se localiza en los ligamentos que separan diferentes microvacíos produciéndose una estricción interna de los mismos, lo que termina provocando la unión de diferentes huecos y la aparición de grietas macroscópicas (Tekoğlu et al., 2015). La distinción entre estos dos modos de localización fue evidenciada en los trabajos computacionales de crecimiento de microvacíos y localización de Koplik y Needleman (1988) y Tvergaard (1982).

El objetivo principal de este trabajo es constatar si la localización macroscópica se produce antes que la coalescencia de huecos o si los dos fenómenos se producen de manera simultánea en materiales viscoplásticos. Para ello, se ha desarrollado una metodología

numérica original, basada en simulaciones de modelos de celdas unitarias tridimensionales en un código comercial de elementos finitos. Con ello, se pretende estudiar la evolución de un hueco esférico sometido a estados de carga complejos, donde se prescriben valores fijos de triaxialidad y parámetro de Lode. La contribución original de este trabajo, basado en un artículo previo de Tekoğlu et al. (2015), es la de considerar el efecto producido por la viscosidad analizando diferentes valores del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación, el cual juega un papel fundamental en los dos modos de localización del flujo plástico. Todo ello, mediante el uso de una nueva metodología numérica que simplifica la implementación del modelo.

6.2 Celda unitaria hexaédrica con hueco esférico

El modelo numérico propuesto, al igual que en el trabajo de Tekoğlu et al. (2015), se compone por dos bloques semi infinitos uniformes, separados por una banda delgada de forma plana, orientada inicialmente con un ángulo ψ_u , que contiene un conjunto periódico de microvacíos inicialmente esféricos, como se puede ver en la Figura 6.1. Aparte de la existencia de huecos en la banda, el material se considera uniforme y con plasticidad J_2 a través de las tres regiones definidas. El conjunto de huecos preexistentes se puede considerar como un cúmulo de imperfecciones iniciales que pueden inducir una localización de la deformación en la banda (banda de localización) y desarrollar el fallo dúctil, al igual que en el trabajo de Nahshon y Hutchinson (2008) y similar a las simulaciones de tensión planada desarrolladas por Marciniak y Kuczyński (1967). El criterio de localización macroscópica utilizado se define como el punto del histórico de deformaciones en el que se produce una descarga elástica en los dos bloques externos y la deformación plástica se concentra en la banda. Este criterio de localización en el bloque central es consistente con el introducido por Rice (1976). Además, el hecho de incorporar los bloques externos en el modelo, hace que sea posible capturar de una manera efectiva el comportamiento en la banda después del comienzo de la localización, pudiendo estudiar a su vez el comienzo de la coalescencia.

El modelo se simplifica mediante la utilización de una celda unitaria con forma de paralelepípedo con un hueco inicialmente esférico en su interior, que representa a la parte de la banda (ver Figura 6.1). En el trabajo realizado por Tekoğlu et al. (2015), los bloques externos no se encuentran físicamente en la geometría del modelo, si no que se tiene en cuenta su influencia a través de un algoritmo de control del estado tensional en la celda, donde se utilizan conectores elásticos (CONN2D2 en ABAQUS) que controlan la fuerza aplicada en el modelo. En cambio, en la metodología original propuesta en este trabajo se incluyen físicamente en el modelo las partes correspondientes a los bloques exteriores semi infinitos que se encuentran en la parte superior e inferior de la banda. Estos bloques externos a la banda se aproximan numéricamente considerando unos bloques lo suficientemente largos para que la influencia del hueco no afecte al comportamiento

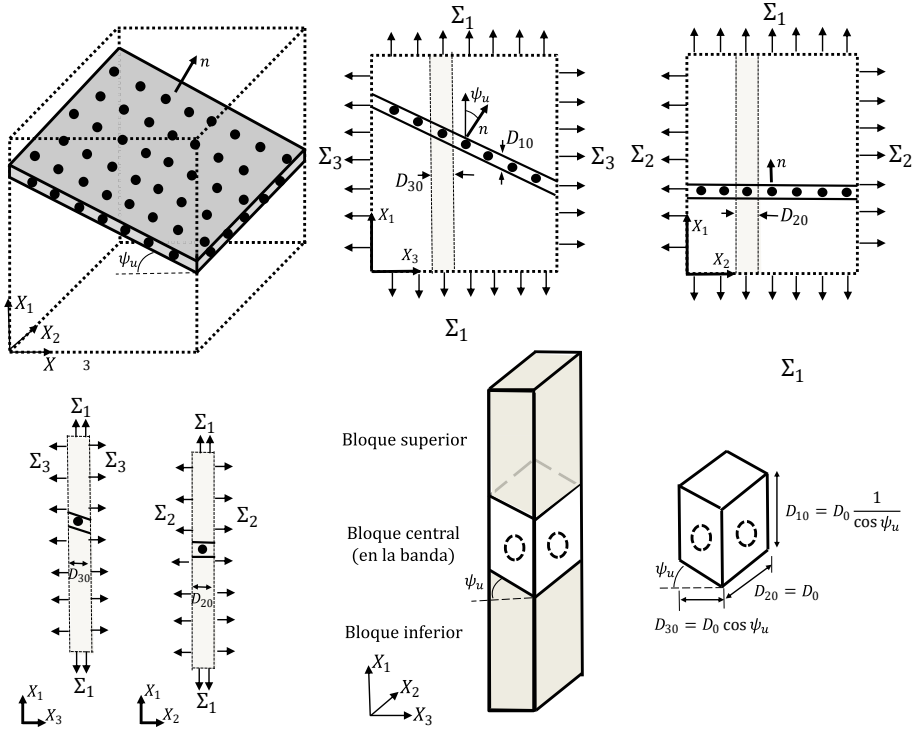


Fig. 6.1 Vista general de un material poroso que contiene una banda delgada con una distribución periódica de microvacíos, orientada con un ángulo inicial ψ_u . El modelo se representa mediante celdas unitarias que contienen un único hueco esférico en el centro y dos bloques semi infinitos libres de huecos fuera de la zona de la banda

en los extremos superior e inferior del modelo completo (celda con hueco más bloques externos), tal y como se puede apreciar en la Figura 6.2.

Gracias a esta nueva metodología, se simplifica de manera sensible la complejidad del modelo presentado por Tekoğlu et al. (2015), dado que no es necesaria la utilización de ninguna formulación adicional para incluir la influencia de los bloques externos en el problema planteado, aunque implica un coste computacional mayor debido al gran número de elementos utilizados. Asimismo, este método permite modificar la orientación inicial de la banda sin necesidad de complicar la geometría con celdas inclinadas, lo que podría conducir a una distorsión de los elementos del mallado en las simulaciones de elementos finitos. En la Figura 6.2 se puede ver una celda con un ángulo inicial de 39 grados, donde se aprecia que el mallado no se encuentra alterado por la inclinación de la banda. En el modelo planteado, únicamente es necesario cambiar las dimensiones iniciales del volumen representativo para tener en cuenta la variación del ángulo de orientación inicial de la banda, el cual se determina con el parámetro ψ_u . Por tanto, las longitudes iniciales del paralelepípedo unitario dependen de ψ_u y vienen dadas por las relaciones $D_{10} = D_0 / \cos \psi_u$, $D_{20} = D_0$ y $D_{30} = D_0 \cos \psi_u$, donde la longitud de referencia

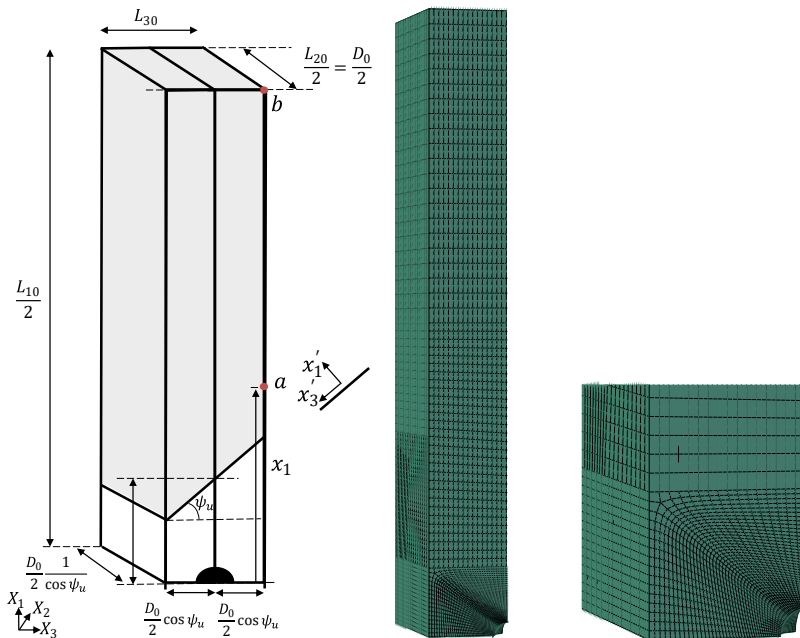


Fig. 6.2 Esquema de un cuarto del volumen representativo utilizado en las simulaciones, con una orientación inicial de la banda ψ_u y una longitud característica D_0 . A su vez, se representa un mallado de elementos finitos del modelo correspondiente a una porosidad inicial $f_0 = 0.001$ y un ángulo inicial $\psi_u = 39^\circ$

es $D_0 = 1 \text{ mm}$. Con estas dimensiones, se consigue que la celda tenga un volumen inicial unitario, de valor $V_{celda} = D_0^3$, donde la fracción de volumen inicial del hueco esférico, con radio inicial R_0 , viene dada por la expresión

$$f_0 = V_{hueco}/V_{celda} = \frac{4\pi R_0^3}{3D_0^3}. \quad (6.1)$$

Los bloques semi infinitos externos a la banda se aproximan numéricamente considerando que son lo suficientemente largos para que la influencia del hueco no afecte al comportamiento en los extremos del modelo completo (celda con hueco más bloques externos). Tras un análisis de convergencia de los resultados, se ha obtenido una longitud inicial en la dirección X_1 del modelo completo L_{10} seis veces superior a la longitud característica del problema D_0 ($L_{10} = 6D_{10}$). Las longitudes iniciales del modelo completo en las otras dos direcciones principales, X_2 y X_3 , mantienen las dimensiones de la celda, debido a la geometría del problema ($L_{20} = D_{20}$ y $L_{30} = D_{30}$).

El volumen representativo se ha analizado numéricamente mediante el software comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014), donde se utiliza un modelo implícito con plasticidad J_2 . El material elegido para el análisis propuesto en este capítulo tiene un comportamiento con una dependencia potencial de la velocidad de

deformación, con un modelo constitutivo definido por

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} E\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^p}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^m\right) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde σ_0 es una constante que representa el límite elástico de referencia, m es el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación, $\dot{\varepsilon}_0$ es la velocidad de deformación de referencia, E es el módulo de Young y $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$.

El conjunto de constantes utilizado en las simulaciones para definir las propiedades del material, tanto para la banda como para los bloques exteriores, son $E = 167 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0 = 418 \text{ MPa}$, $\varepsilon_0 = 0.0025$ y $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$. Estos valores han sido utilizados para mantener una concordancia con los resultados obtenidos por Tekoğlu et al. (2015). Con el objetivo de estudiar la contribución relativa del efecto de la velocidad de deformación en la localización en la coalescencia de huecos, se llevan a cabo simulaciones numéricas para diferentes valores del parámetro m comprendidos entre 0 y 0.25. A su vez, en las simulaciones numéricas llevadas a cabo en este estudio se abordan tres valores iniciales de la orientación de la banda $\psi_u = 0^\circ$, $\psi_u = 20^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$, una fracción de volumen inicial de hueco $f_0 = 0.001$ y una longitud característica $D_0 = 1 \text{ mm}$.

En la Figura 6.3 se muestra el mallado utilizado en un modelo con $\psi_u = 0^\circ$ y $f_0 = 0.001$, donde se han empleado un total de 40 198 elementos hexaédricos cuadráticos de veinte nodos con integración reducida (C3D20R). Por razones de simetría, únicamente se representa un octavo de la celda completa analizada.

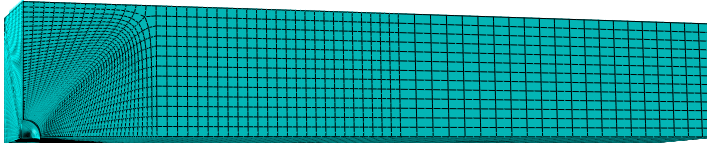


Fig. 6.3 Mallado de la celda unitaria para $f_0 = 0.001$ y $\psi_u = 0^\circ$

6.3 Formulación del modelo de celda unitaria

En el caso materiales hipoeelásticos-plásticos, el tensor de velocidades de deformación plástica macroscópico $\dot{\mathbf{E}}$ está relacionado con la variación temporal de la tensión macroscópica por la expresión

$$\dot{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p), \quad (6.3)$$

donde \mathbf{C} es el tensor isótropo elástico, que se define como

$$\mathbf{C} = 2G\mathbf{I}' + K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (6.4)$$

Interacción entre la localización macroscópica y la coalescencia de huecos en materiales viscoplásticos

y con $G = E/(2(1 + \nu))$ y $K = E/(3(1 - 2\nu))$ como constantes elásticas. E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson. Por otra parte, \mathbf{I}' es el tensor desviador unitario de cuarto orden que se define como

$$(\mathbf{I}')_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (6.5)$$

Considerando plasticidad Von Mises con endurecimiento isótropo, la función de plastificación y la regla de flujo asociada se escriben de la forma

$$\begin{aligned} \Psi &= \Sigma_{eq} - \bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}^p), \\ \dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\mathbf{\Sigma}}}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde la tensión equivalente $\bar{\sigma}(\dot{\varepsilon}^p)$ viene dada por una función de la velocidad de deformación plástica equivalente

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}^p : \dot{\mathbf{E}}^p}. \quad (6.7)$$

Por otro lado, al definir las condiciones de contorno, se asume que las caras externas de la celda completa (banda y bloques externos) permanecen paralelas entre ellas y perpendiculares a las direcciones 1, 2 y 3, respectivamente. De la misma manera, se considera que las intercaras entre la banda y los bloques externos se mantienen planas durante todo el proceso de deformación. En realidad, estas superficies que separan la banda de los bloques externos son afectadas ligeramente por la presencia del hueco y pueden perder su forma plana en algún momento del proceso de deformación. Sin embargo, este efecto se considera despreciable en este trabajo debido a su baja influencia. Bajo estas premisas, las condiciones de contorno en la caras superior e inferior de la celda son

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ en } X_1 = 0, & u_1 &= U_1 \text{ en } X_1 = L_1, \\ u_2 &= 0 \text{ en } X_2 = 0, & u_2 &= U_2 \text{ en } X_2 = L_2, \\ u_3 &= 0 \text{ en } X_3 = 0, & u_3 &= U_3 \text{ en } X_3 = L_3. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Las deformaciones macroscópicas logarítmicas principales en los bloques externos E_1 , E_2 y E_3 , medidas en las superficies superior e inferior del modelo (punto b en la Figura 6.2), se definen como

$$E_1 = \ln(\lambda_1), \quad E_2 = \ln(\lambda_2) \quad \text{y} \quad E_3 = \ln(\lambda_3),$$

siendo $\lambda_1 = L_1/L_{01}$, $\lambda_2 = L_2/L_{02}$ y $\lambda_3 = L_3/L_{03}$. L_1 , L_2 y L_3 son las longitudes de celda actuales en la celda completa,

$$L_1 = L_{01} + 2U_1, \quad L_2 = L_{02} + 2U_2 \quad \text{y} \quad L_3 = L_{03} + 2U_3. \quad (6.9)$$

A su vez, las velocidades de deformación macroscópicas principales tienen la forma

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}, \quad \dot{E}_3 = \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3}. \quad (6.10)$$

Debido a la presencia del hueco, la zona de la celda correspondiente a la banda es menos rígida que la zona de los bloques externos y, por lo tanto, la deformación en la banda es mayor. Este hecho se tiene en cuenta introduciendo unos desplazamientos adicionales del sólido rígido aplicados en los bloques externos con valores $2\Delta_1$ y $2\Delta_3$. En el caso de una celda sin hueco, los valores Δ_1 y Δ_3 son iguales a cero. Debido a las condiciones de simetría, en la dirección X_2 no existen desplazamientos adicionales. El campo de desplazamientos correspondiente al bloque externo superior, por encima de la banda con hueco (punto a en la Figura 6.2), puede ser escrito como

$$\begin{aligned} u_1 &= (\lambda_1 - 1)x_1 + \Delta_1, \\ u_2 &= (\lambda_2 - 1)x_2, \\ u_3 &= (\lambda_3 - 1)x_3 + \Delta_3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Asimismo, en el bloque externo inferior, en cualquier punto situado por debajo de la banda con hueco, los desplazamientos son

$$\begin{aligned} u_1 &= (\lambda_1 - 1)x_1 - \Delta_1, \\ u_2 &= (\lambda_2 - 1)x_2, \\ u_3 &= (\lambda_3 - 1)x_3 - \Delta_3. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para un estado de carga dado, y con un ángulo de orientación inicial de la banda ψ_u dado, se puede conocer el ángulo de orientación de la banda en cada momento ψ , a través de los valores de la deformación macroscópica en los bloques externos aplicando (Tekoğlu et al., 2015)

$$\begin{aligned} \tan(\psi) &= e^{(E_1 - E_3)} \tan(\psi_u), \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{2} \sin(2\psi) (\dot{E}_1 - \dot{E}_3). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Del mismo modo, las componentes de la velocidad de deformación macroscópica en la banda \dot{E}_{ij}^b se pueden obtener como la suma de las deformaciones uniformes correspondientes a los bloques externos y las asociadas a los desplazamientos adicionales del sólido

rígido Δ_1 y Δ_3 ,

$$\begin{aligned}\dot{E}_{11}^b &= \cos^2(\psi) \dot{E}_1 + \sin^2(\psi) \dot{E}_3 + \frac{2\dot{\Delta}_1 \cos(\psi) - 2\dot{\Delta}_3 \sin(\psi)}{H}, \\ \dot{E}_{22}^b &= \dot{E}_2, \\ \dot{E}_{33}^b &= \sin^2(\psi) \dot{E}_1 + \cos^2(\psi) \dot{E}_3, \\ \dot{E}_{13}^b &= \sin(2\psi) (\dot{E}_1 - \dot{E}_3) + \frac{2\dot{\Delta}_3 \cos(\psi) + 2\dot{\Delta}_1 \sin(\psi)}{H},\end{aligned}\tag{6.14}$$

donde H es el espesor de la banda, perpendicular a la misma, siendo $H_0 = D_{10} \cos \psi_u$ y $\dot{H} = \dot{E}_{11}^b H$. Aquí, las componentes \dot{E}_{ij}^b vienen definidas respecto a los ejes de coordenadas locales (x'_1, x'_2, x'_3) ligados a la banda (ver Figura 6.2), los cuales rotan con la banda satisfaciendo las relaciones

$$x'_1 = X_1 \cos \psi + X_3 \sin \psi, \quad x'_2 = X_2, \quad x'_3 = -X_1 \sin \psi + X_3 \cos \psi.\tag{6.15}$$

Las componentes de la velocidad de deformación macroscópica \dot{E}_i , no obstante, se expresan respecto a los ejes de coordenadas globales (X_1, X_2, X_3) .

Por otra parte, las velocidades de deformación macroscópicas equivalentes \dot{E}_{eq}^b y \dot{E}_{eq} se definen como

$$\dot{E}_{eq}^b = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{E}_{ij}^b \dot{E}_{ij}^b}, \quad \dot{E}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\dot{E}_1^2 + \dot{E}_2^2 + \dot{E}_3^2)}.\tag{6.16}$$

Las tensiones macroscópicas en direcciones principales $(\Sigma_1, \Sigma_2$ y $\Sigma_3)$ se definen, en función del tensor de tensiones de Cauchy σ_{ii} , como

$$\Sigma_i = \frac{1}{L_j L_k} \int_0^{L_j} \int_0^{L_k} [\sigma_{ii}]_{x_i=L_i} dx_j dx_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad i \neq j, k,\tag{6.17}$$

Además, la triaxialidad del estado tensional macroscópico T y el parámetro de Lode L se definen, en función de las tensiones macroscópicas en direcciones principales, como

$$T = \frac{\Sigma_h}{\Sigma_e}, \quad L = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3},\tag{6.18}$$

siendo Σ_{eq} y Σ_h la tensión macroscópica equivalente y la tensión hidrostática, cuyas definiciones son

$$\Sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_1 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 \right)^{1/2}, \quad \Sigma_h = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3}.\tag{6.19}$$

A su vez, definiendo la triaxialidad y el parámetro de Lode en función de los ratios de tensión $Q = \Sigma_3/\Sigma_1$ y $R = \Sigma_2/\Sigma_1$, se tiene que

$$T = \frac{\sqrt{2}(R+Q+1)}{3\sqrt{(1-R)^2 + (1-Q)^2 + (R-Q)^2}}, \quad L = \frac{2R-Q-1}{1-Q}. \quad (6.20)$$

6.3.1 Condiciones de contorno para prescribir la triaxialidad y el parámetro de Lode

En este trabajo, las deformaciones y tensiones aplicadas en la celda van a estar definidas por los valores de la triaxialidad del estado tensional T , el parámetro de Lode L y la deformación macroscópica equivalente E_{eq} en las caras externas de la celda completa (banda más bloques externos). Los cálculos realizados se desarrollan mediante la utilización de valores prescritos constantes de T comprendidos entre los rangos $0.75 \leq T \leq 3$, y un valor de $L = -1$.

El método empleado en este trabajo para prescribir los valores de T y L es el mismo empleado en el estudio realizado en el Capítulo 5 de esta tesis doctoral. En él, se realiza un control de las condiciones de contorno, en concreto se utiliza un control de desplazamientos y no de carga, por lo que se evitan problemas numéricos asociados al ablandamiento del material debido al crecimiento de la porosidad. La formulación original de este método proviene del trabajo de Faleskog et al. (1998), donde se prescribía el valor de triaxialidad en un celda cúbica sometida a un estado de deformación plana. Estas condiciones de contorno se implementan en el modelo numérico en las caras externas de la celda completa mediante una subrutina de usuario MULTIPOINT-CONSTRAINT (MPC), en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard (Simulia, 2014).

Para una información más detallada del método utilizado para prescribir los valores de triaxialidad y el parámetro de Lode, se puede consultar la sección 5.2.1 de esta tesis doctoral.

6.4 Análisis de resultados

En este apartado, se presenta un análisis de los resultados obtenidos mediante el estudio de simulaciones numéricas del modelo de celda unitaria propuesto en este capítulo, que contiene un hueco inicialmente esférico en su interior, con el objetivo de conocer la influencia de la sensibilidad a la velocidad de deformación del material en el comienzo de la localización y la coalescencia. Cabe destacar, que todos los casos estudiados en este trabajo se han realizado para un modelo de celda unitaria con una porosidad inicial $f_0 = 0.001$ y aplicando un estado tensional con un valor del parámetro de Lode $L = -1$.

6.4.1 Validación del modelo numérico

En primer lugar, con el objetivo de poder establecer una relación entre los resultados del trabajo de Tekoğlu et al. (2015) y los obtenidos con la nueva metodología propuesta en esta tesis doctoral, se ha llevado a cabo un análisis de convergencia para obtener la longitud óptima de los bloques externos y la cantidad y el tipo de elementos utilizados en las simulaciones. Para ello, únicamente en este subapartado, se ha implementado en el modelo la misma formulación constitutiva que en el trabajo de Tekoğlu et al. (2015), donde se utiliza un material elastoplástico con dependencia potencial de la deformación que se define como

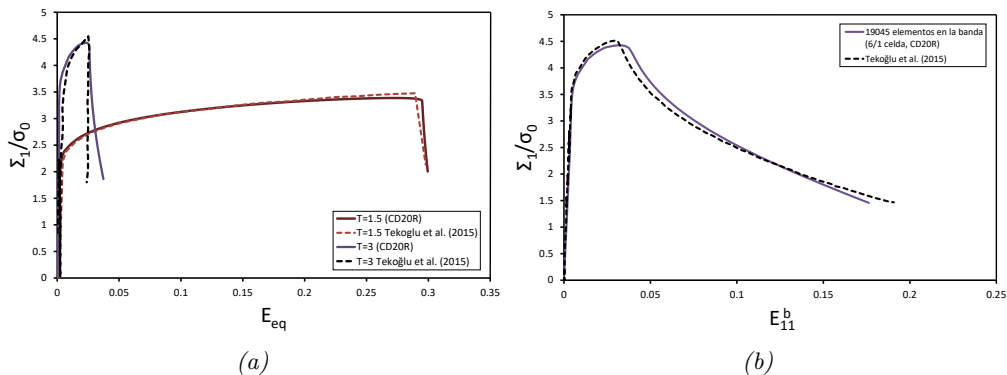


Fig. 6.4 Comparativa de los resultados obtenidos con la nueva metodología propuesta en este trabajo frente al modelo presentado por Tekoğlu et al. (2015) para un material dependiente únicamente de la deformación, donde se representa la tensión macroscópica en dirección longitudinal adimensionalizada Σ_1/σ_0 frente a la deformación equivalente macroscópica en la celda completa E_{eq} para diferentes triaxialidades (a). A su vez se representa Σ_1/σ_0 frente a la deformación longitudinal macroscópica en la banda para $T = 3$ (b). La porosidad inicial es $f = 0.001$, el parámetro de Lode $L = -1$, el exponente de endurecimiento $N = 0.1$ y el ángulo de orientación inicial de la banda $\psi_u = 0^\circ$

$$\bar{\sigma}^* = \begin{cases} E\varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0} \right)^N & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0, \end{cases} \quad (6.21)$$

donde σ_0 es una constante que representa el límite elástico de referencia, N es el exponente de endurecimiento por deformación, ε_0 es la deformación de referencia, E es el módulo de Young y $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$. Las propiedades del material en este caso son $E = 167 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\sigma_0 = 418 \text{ MPa}$, $\varepsilon_0 = 0.0025$ y $N = 0.1$. En la Figura 6.4 se representan una muestra de los resultados obtenidos mediante el software de elementos finitos ABAQUS (Simulia, 2014) con la configuración definitiva del modelo propuesto, con una longitud inicial en la dirección X_1 del modelo completo L_{10} seis veces superior a la longitud característica del problema D_0 ($L_{10} = 6D_{10}$) y una cantidad de elementos en la parte correspondiente a un octavo de la banda de 19045 elementos de tipo CD20R. En las gráficas de la Figura 6.4 se representa la tensión macroscópica en dirección longitudinal adimensionalizada

Σ_1/σ_0 frente a la deformación equivalente macroscópica en la celda completa E_{eq} para diferentes triaxialidades (a) y frente a la deformación longitudinal macroscópica en la banda para $T = 3$ (b). La porosidad inicial es $f = 0.001$, el parámetro de Lode $L = -1$, el exponente de endurecimiento $N = 0.1$ y el ángulo de orientación inicial de la banda $\psi_u = 0^\circ$. Se puede apreciar la gran similitud de los resultados pese a las importantes diferencias entre los dos modelos.

6.4.2 Localización y coalescencia

Retomando el modelo desarrollado en este capítulo, con la formulación constitutiva dependiente de la velocidad de deformación presentada en la sección 6.2, se define el comienzo de la localización en la celda como el momento en que la deformación macroscópica en los bloques externos se frena y la velocidad de deformación en la banda \dot{E}_{eq} crece drásticamente. A su vez, el comienzo de la coalescencia se considera que tiene lugar cuando el ratio entre la máxima y la mínima velocidad de deformación en la superficie interior del hueco, dentro de la celda unitaria, alcanza un valor de 20 (Tekoğlu et al., 2015).

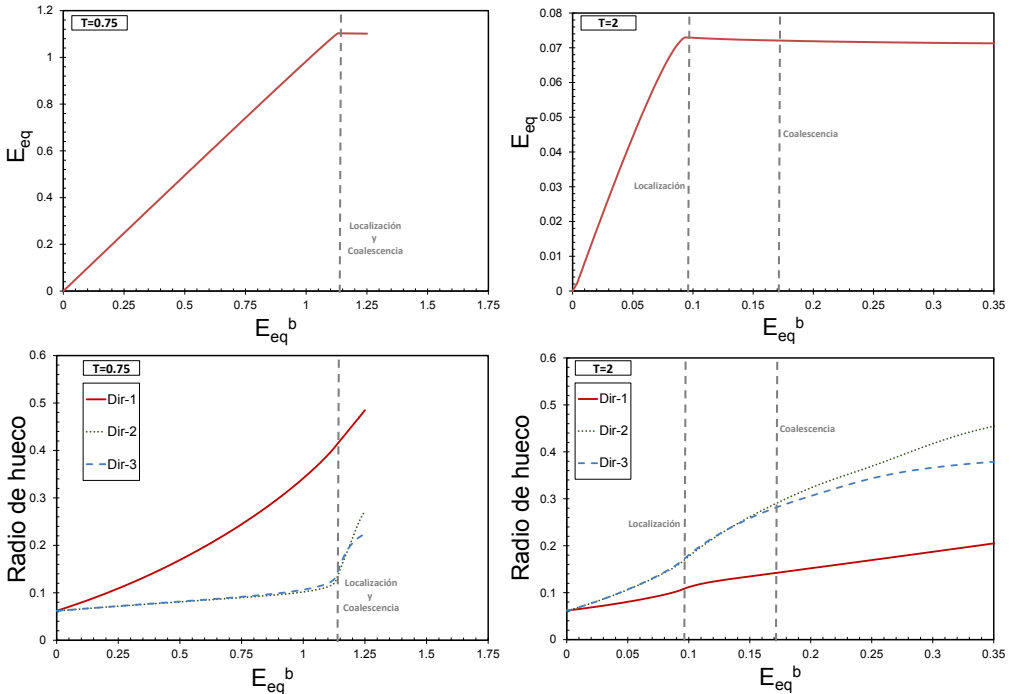


Fig. 6.5 Representación de los criterios de localización y coalescencia, donde se enfrenta la deformación macroscópica equivalente E_{eq} y el radio del hueco a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b para $T = 0.75$ y $T = 2$, $m = 0$ y $\psi_u = 39^\circ$. El comienzo de la localización y la coalescencia se simbolizan mediante las líneas verticales discontinuas

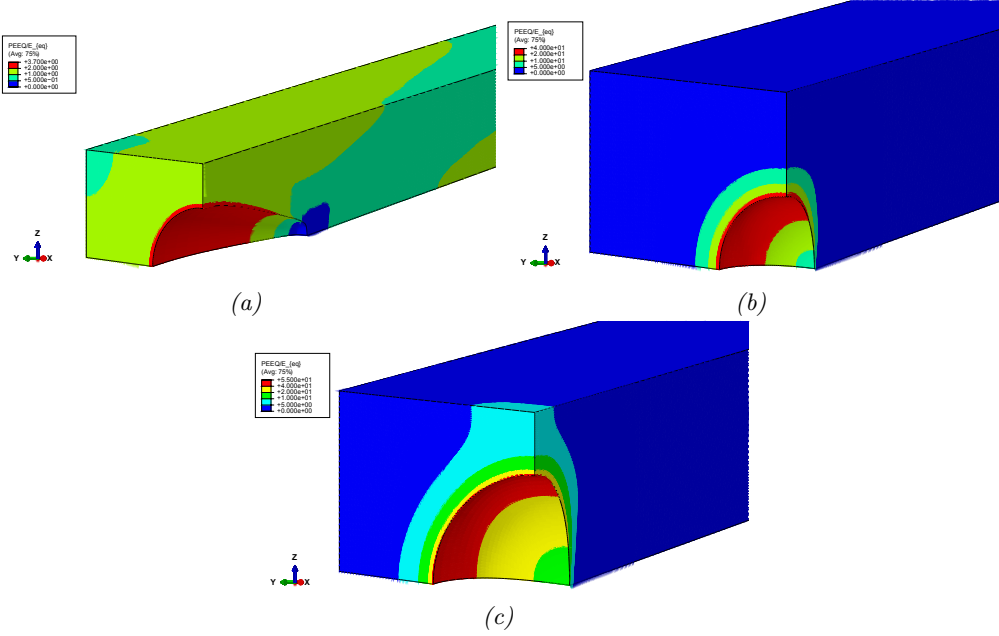


Fig. 6.6 Modelo de elementos finitos con los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para $m = 0$ y $\psi_u = 39^\circ$ al comienzo de la localización y coalescencia en el caso de $T = 0.75$ (a) y $T = 2$ (b,c)

En la Figura 6.5 se muestra una representación gráfica de los criterios de localización y coalescencia utilizados en este trabajo para los valores de triaxialidad $T = 0.75$ y $T = 2$, exponente de endurecimiento por velocidad de deformación $m = 0$ y ángulo de orientación inicial de la banda $\psi_u = 39^\circ$. Por una parte, se representa la deformación macroscópica equivalente E_{eq} en la celda completa (banda más bloques externos) frente a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b . Aquí se puede apreciar el momento en que cesa la deformación en los bloques externos, concentrándose en la parte correspondiente a la banda (comienzo de la localización). Por otra parte, se representa el radio del hueco frente a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b , donde se puede ver que según la dirección el radio del hueco crece a una velocidad diferente, llegando el punto en el que se satisface el criterio de coalescencia asumido en este trabajo. Asimismo, en estas representaciones se puede apreciar la influencia de la triaxialidad en los fenómenos de localización y coalescencia. Para el valor de triaxialidad más pequeño utilizado en este trabajo ($T = 0.75$) se necesita una deformación mucho mayor en la celda para que se llegue a los criterios establecidos que para triaxialidades mayores ($E_{eq}^b \approx 1.14$ para localización para $T = 0.75$ frente a $E_{eq}^b \approx 0.095$ para $T = 2$). No obstante, según aumenta valor de la triaxialidad, la separación entre los fenómenos de localización y coalescencia crece considerablemente. En la Figura 6.6 se muestran imágenes del modelo de elementos finitos utilizado en la simulaciones representado los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para los casos comentados, al comienzo de la localización y coalescencia para $T = 0.75$

(a) y $T = 2$ (b y c, respectivamente), donde se puede observar la pérdida notable de la forma esférica en el hueco con valores bajos de triaxialidad.

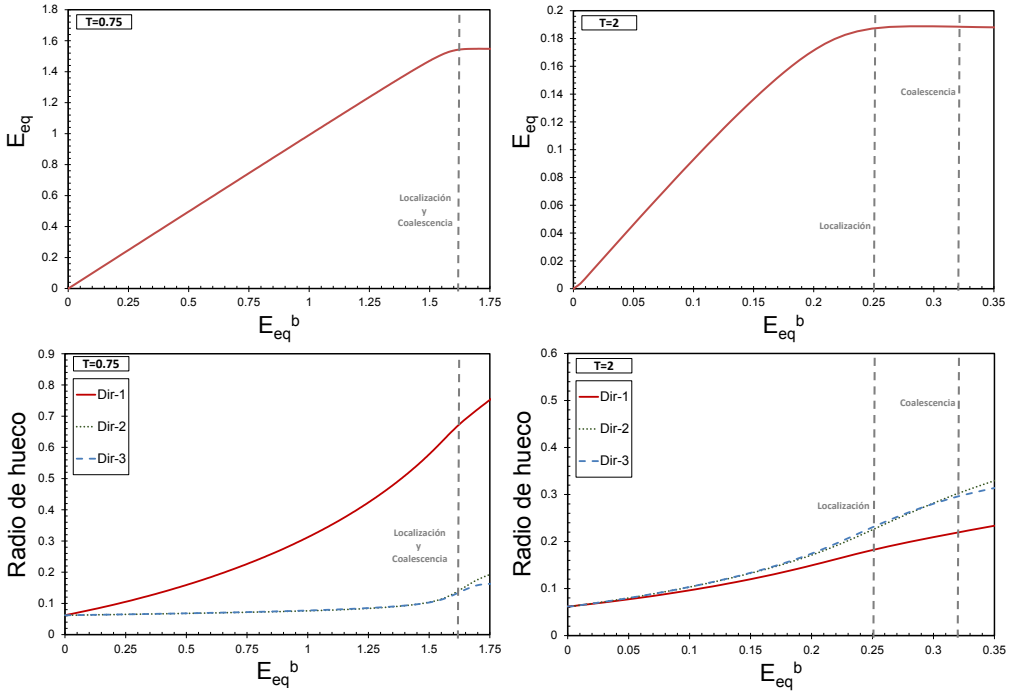


Fig. 6.7 Representación de los criterios de localización y coalescencia, donde se enfrenta la deformación macroscópica equivalente E_{eq} y el radio del hueco a la deformación macroscópica equivalente en la banda E_{eq}^b para $T = 0.75$ y $T = 2$, $m = 0.1$ y $\psi_u = 39^\circ$. El comienzo de la localización y la coalescencia se simbolizan mediante las líneas verticales discontinuas

En la Figura 6.7 se muestra la misma representación pero para un valor del exponente de endurecimiento $m = 0.1$, donde se puede apreciar un comportamiento similar de la celda, con la misma influencia del valor de triaxialidad. No obstante, debido al valor del exponente de endurecimiento se produce una estabilización del problema, retrasándose el comienzo de la localización y la coalescencia a mayores valores de deformación equivalente en la banda ($E_{eq}^b \approx 1.62$ para localización y coalescencia en $T = 0.75$ y $E_{eq}^b \approx 0.25$ y $E_{eq}^b \approx 0.32$ en el caso de $T = 2$). A su vez, en la Figura 6.8 se muestran imágenes del modelo de elementos finitos utilizado en la simulaciones representado los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para los casos comentados con $m = 0.1$, al comienzo de la localización y coalescencia para $T = 0.75$ (a) y $T = 2$ (b y c, respectivamente), con un comportamiento similar que el comentado para $m = 0$.

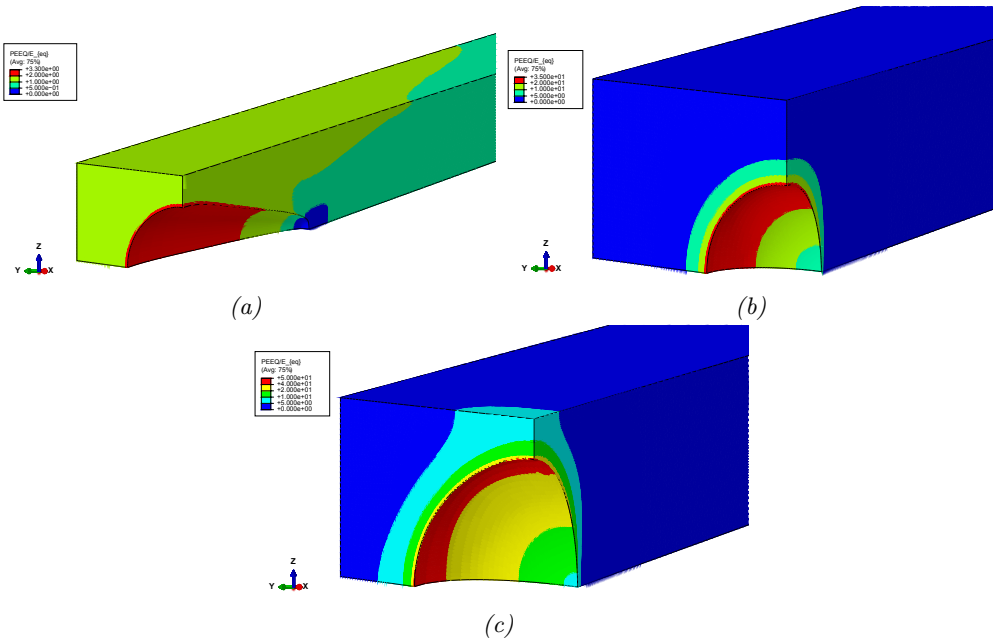


Fig. 6.8 Modelo de elementos finitos con los resultados de $\varepsilon_{eq}^p/E_{eq}$ para $m = 0.1$ y $\psi_u = 39^\circ$ al comienzo de la localización y coalescencia en el caso de $T = 0.75$ (a) y $T = 2$ (b,c)

6.4.3 Evolución de la porosidad

En la Figura 6.9 se muestran gráficas que representan la evolución del ratio de porosidad f/f_0 (con $f_0 = 0.001$ en todos los casos estudiados), como una función de deformación macroscópica equivalente E_{eq} , para un valor del parámetro de Lode $L = -1$, dos valores prescritos de la triaxialidad ($T = 0.75$ y $T = 2$) y dos orientaciones iniciales de la banda ($\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$). Con el fin de cuantificar el efecto del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación, se consideran los valores $m = 0$, $m = 0.05$ y $m = 0.1$. En las representaciones, el comienzo de la localización se señala con cruces de color azul y el comienzo de la coalescencia con círculos rellenos de color negro.

Tal y como se puede apreciar en la Figura 6.9, el hecho de incrementar el valor de m desplaza las curvas hacia la derecha para las dos triaxialidades y ángulos de orientación representados, produciéndose la localización y la coalescencia en valores mayores de deformación. En el caso de un ángulo inicial de orientación de la banda $\psi_u = 0^\circ$ con $m = 0$ y $T = 2.5$, se tiene que el comienzo de la localización y de la coalescencia del hueco se producen con $E_{eq} \approx 0.035$, apareciendo en primer lugar la localización con un ratio de porosidad $f/f_0 \approx 10$ y después la coalescencia con $f/f_0 \approx 52$. De la misma manera, se constata el aumento de la separación existente, en términos de porosidad, entre el inicio de la localización y la coalescencia al aumentar el valor de m , con $f/f_0 \approx 16$ y $f/f_0 \approx 76$ para $m = 0.1$, ambos en un valor de deformación equivalente $E_{eq} \approx 0.045$. En cambio, para un valor de $T = 0.75$, el comienzo de la localización y de la coalescencia se

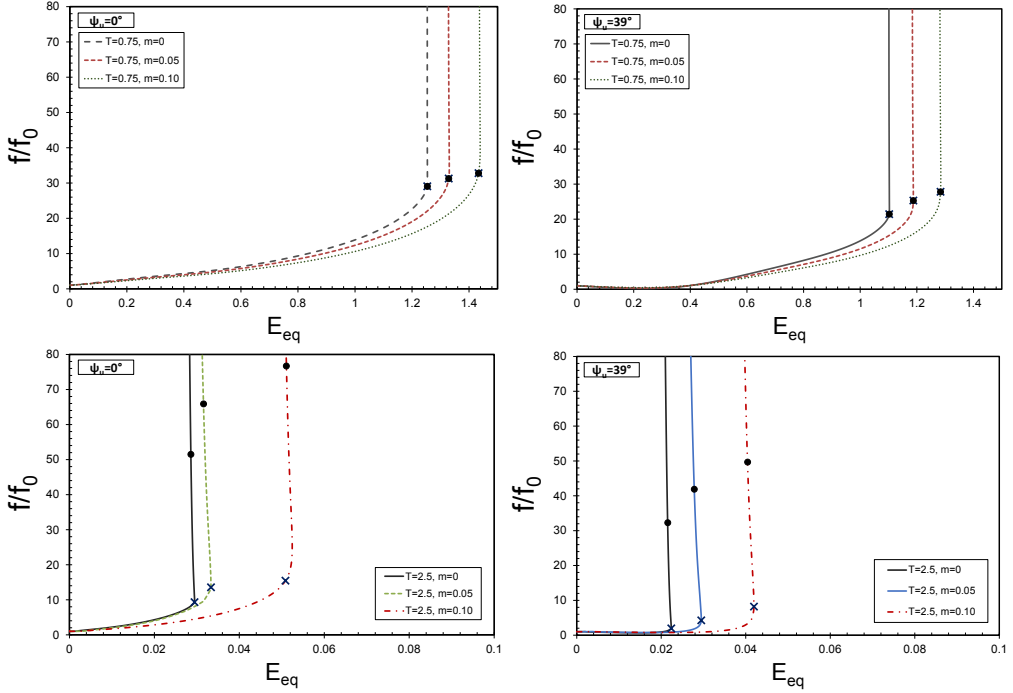


Fig. 6.9 Evolución del ratio de porosidad f/f_0 frente a la deformación macroscópica equivalente E_{eq} para $T = 0.75$ y $T = 2.5$, para $m = 0$, $m = 0.05$ y $m = 0.1$ y para $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$. Los cruces simbolizan el comienzo de la localización y los círculos, la coalescencia. Para todos los casos se toma $L = -1$ y $f_0 = 0.001$

produce de manera simultánea, cuando $f/f_0 \approx 26$ para $m = 0$, $f/f_0 \approx 31$ para $m = 0.05$ y $f/f_0 \approx 33$ para $m = 0.1$. En el caso de un ángulo inicial de orientación de la banda $\psi_u = 39^\circ$, los valores de las deformaciones de localización y coalescencia, así como los ratios de porosidad críticos, son menores que los obtenidos para $\psi_u = 0^\circ$ para ambas triaxialidades y los valores de m presentados.

6.4.4 Porosidad crítica

Por otro lado, se estudia la influencia que tiene el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m en la fracción en volumen de hueco crítica f_c al comienzo de la localización y coalescencia. Para ello, en la Figura 6.10 se presentan los valores f_c normalizados con la porosidad inicial f_0 en función de m , obtenidos de las simulaciones de la celda unitaria en el momento de la localización y coalescencia para orientaciones iniciales de la banda $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$, y diferentes valores de la triaxialidad ($T = 0.75, 1.5, 2$ y 2.5).

Los resultados para el valor de triaxialidad $T = 0.75$ se caracterizan, como ya se ha comentado anteriormente, por la aparición de manera simultánea de los dos fenómenos de inestabilidad en el material, mostrando valores mayores de la porosidad crítica al

Interacción entre la localización macroscópica y la coalescencia de huecos en materiales viscoplásticos

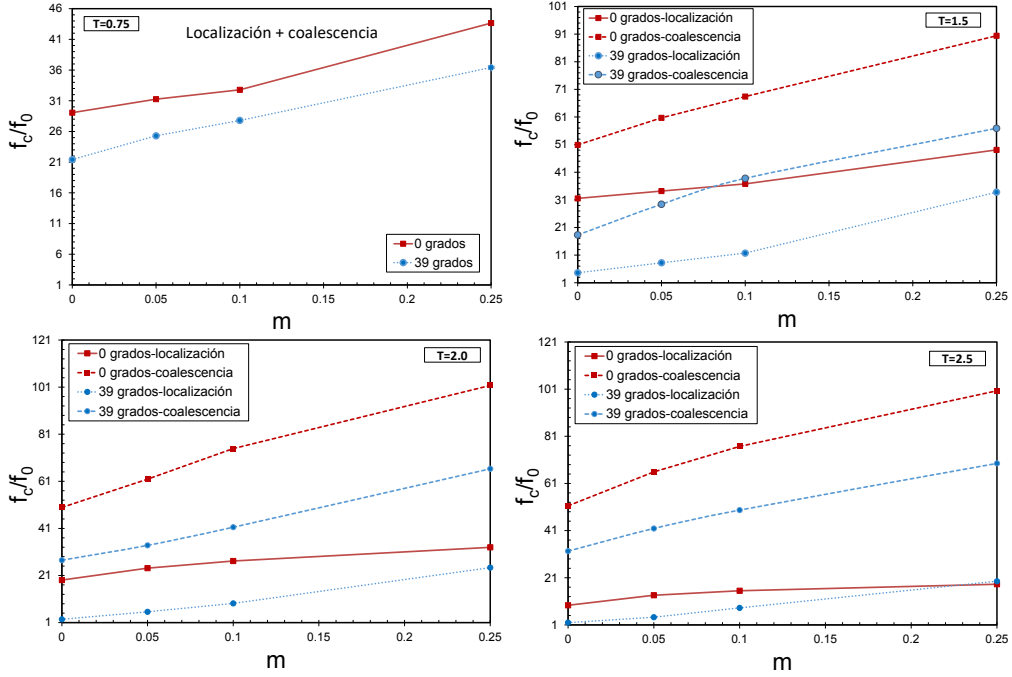


Fig. 6.10 Valores de f_c/f_0 al comienzo de la localización y coalescencia como una función de m para $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$, y para diferentes valores de triaxialidad

comienzo de la localización y coalescencia cuando aumenta el valor de m . Para $\psi_u = 0^\circ$ y $m = 0$ la porosidad crítica normalizada tiene un valor de $f_c/f_0 \approx 29$, y para $m = 0.25$, $f_c/f_0 \approx 44$. En el caso de $\psi_u = 39^\circ$ la localización y coalescencia aparecen de una forma más prematura, con unos valores de $f_c/f_0 \approx 20$ cuando $m = 0$ y $f_c/f_0 \approx 36$ con $m = 0.25$.

Para el resto de triaxialidades estudiadas, se observa una tendencia muy similar para $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$, donde la separación entre el comienzo de la localización y el fenómeno de coalescencia es muy evidente, siendo siempre la porosidad crítica f_c de localización menor que la de coalescencia. Es apreciable también, que dicha separación crece cuando se incrementa el valor de triaxialidad T aplicado. Asimismo, se puede ver que existe una influencia de la orientación inicial de la banda en el comportamiento del material, siendo siempre menores los valores de la porosidad crítica, tanto de localización como de coalescencia, cuando el ángulo $\psi_u = 39^\circ$.

6.4.5 Influencia de la triaxialidad

Las gráficas de la Figura 6.11 comparan la deformación equivalente crítica en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia, como función de la triaxialidad en cada caso en el rango $0.75 \leq T \leq 3$, para dos valores del exponente de endurecimiento ($m = 0.05$ y $m = 0.1$) y tres orientaciones iniciales de la banda ($\psi_u = 0^\circ$, $\psi_u = 20^\circ$ y

$\psi_u = 39^\circ$). En todos los casos se considera un valor del parámetro de Lode $L = -1$ y una porosidad inicial $f_0 = 0.001$. Cabe destacar que se utiliza la deformación equivalente en la banda (en escala logarítmica en este caso), en vez de la deformación equivalente en la celda completa, con la finalidad de obtener una mejor diferenciación de los resultados de localización y coalescencia, ya que la deformación en los bloques externos cesa en el momento en que se produce la localización, mientras que la deformación en la banda sigue aumentando.

A la vista de los resultados, se aprecia que para los casos estudiados, tal y como se puede ver en el trabajo de Tekoğlu et al. (2015) para materiales sin dependencia de la velocidad de deformación, se obtiene que para valores de $T > 1$ se produce una mayor separación entre las deformaciones de localización y coalescencia, un efecto que se incrementa cuando crece la triaxialidad. No obstante, para valores de $T < 1$, el comienzo de la localización y de la coalescencia se produce de una manera prácticamente simultánea. La transición entre ambos comportamientos se produce en $T \approx 1$. Además, se aprecia que, fijando los valores de m y ψ_u , la deformación equivalente en la banda necesaria para que se produzcan ambos fenómenos, localización y coalescencia, decrece cuando aumenta la triaxialidad.

6.4.6 Influencia de la orientación inicial de la banda

En la Figura 6.12 se representan los valores críticos de la deformación equivalente en el exterior de la celda completa E_{eq}^c (banda más bloques externos) frente al exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m . Se han considerado tres ángulos de orientación iniciales de la banda ψ_u (0° , 20° y 39°), dos valores de triaxialidad T (0.75 y 2.5) y diferentes valores del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m (0, 0.05, 0.1 y 0.25). En todos los casos se considera un valor del parámetro de Lode $L = -1$ y una porosidad inicial $f_0 = 0.001$.

Para todos los valores de m y de triaxialidad estudiados, el valor del ángulo inicial que provoca un comportamiento más inestable de la banda (donde el comienzo de la localización se produce de forma más prematura) es $\psi_u = 39^\circ$ (línea de puntos azul en Fig. 6.13). Por el contrario, la orientación inicial que desemboca en un comportamiento más estable de la banda difiere según los valores de la triaxialidad y del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación. Así, para un valor de $T = 0.75$ el ángulo de orientación que retrasa más el comienzo de la localización es $\psi_u = 0^\circ$, para todos los valores de m . En cambio, cuando se aumenta el valor de la triaxialidad ($T = 2.5$) las diferencias entre los valores de E_{eq}^c en los que se produce la localización para los ángulos $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 20^\circ$ se reducen de forma considerable, siendo incluso más estable el ángulo de orientación $\psi_u = 20^\circ$ cuando $m = 0.25$.

La orientación crítica de la banda es el ángulo que corresponde al menor valor de E_{eq}^c al comienzo de la localización. Sin embargo, para obtener esta orientación crítica de forma precisa, es necesario realizar una campaña de simulaciones numéricas más

Interacción entre la localización macroscópica y la coalescencia de huecos en materiales viscoplásticos

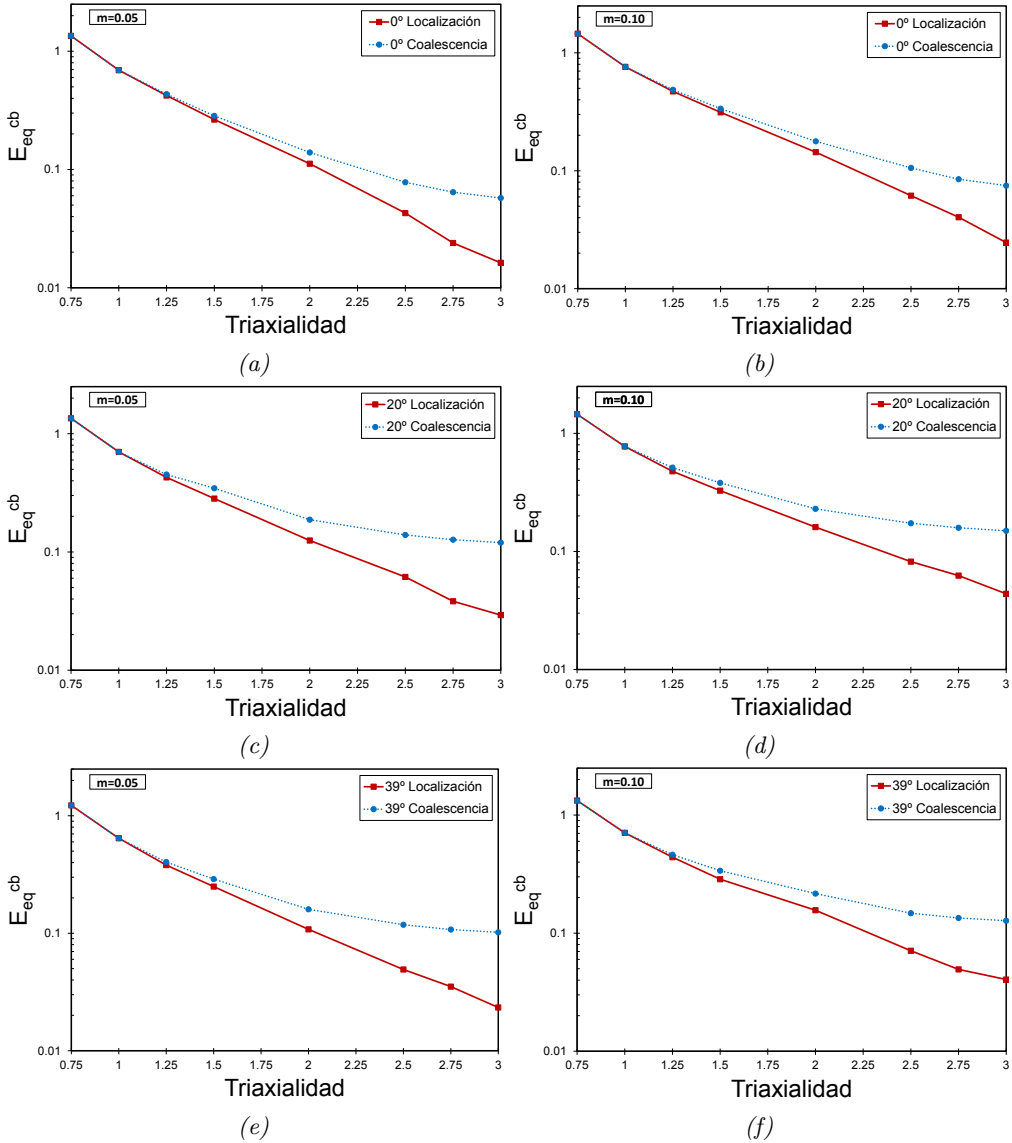


Fig. 6.11 Deformación macroscópica equivalente crítica en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y la coalescencia frente a la triaxialidad T , para $m = 0$ (a,c,e) y $m = 0.1$ (b,d,f) y para $\psi_u = 0^\circ$ (a,b), $\psi_u = 20^\circ$ (c,d) y $\psi_u = 39^\circ$ (e,f). Se utiliza una escala logarítmica en base 10 en el eje y

extensa a la desarrollada en esta tesis doctoral, con más ángulos de orientación iniciales y aplicando diferentes estados tensionales. En este trabajo, solo se han considerado un rango de valores iniciales limitado, por lo que se requeriría de una mayor cantidad de análisis para poder obtener conclusiones más acotadas al respecto.

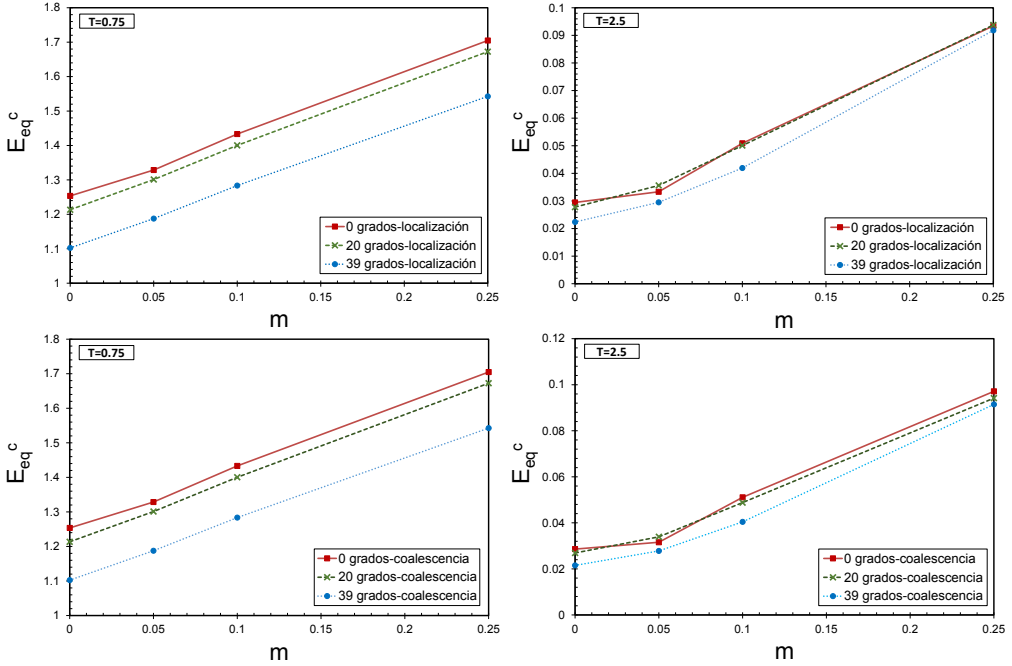


Fig. 6.12 Valores críticos de la deformación equivalente en la celda completa E_{eq}^c al comienzo de la localización y coalescencia frente al exponente de endurecimiento m para $L = -1$, $f_0 = 0.001$ y diferentes valores de T y ψ_u

Por otro lado, en la Figura 6.13 se realiza una representación similar a la anterior (Figura 6.12), pero en este caso con los valores críticos de la deformación equivalente en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia frente al exponente de endurecimiento m , de nuevo para $T = 0.75$ y $T = 2.5$, y tres ángulos de orientación iniciales ψ_u (0° , 20° y 39°). Es interesante ver que representando la deformación equivalente en la banda la tendencia de las curvas varía, dependiendo de una forma clara del valor de triaxialidad considerado. Cuando la triaxialidad tiene un valor $T = 0.75$ se observa que la orientación crítica de la banda en términos de E_{eq}^{cb} sigue siendo $\psi_u = 39^\circ$, aunque en el caso de $\psi_u = 0^\circ$ se necesita menor deformación equivalente en la banda para que se produzca la localización y la coalescencia que con $\psi_u = 20^\circ$, para los valores más elevados de m . Este cambio de tendencia se aprecia de manera más obvia cuando aumenta el valor de la triaxialidad ($T = 2.5$), donde el ángulo que necesita menores deformaciones equivalentes en la banda para que se produzca la localización y coalescencia es $\psi_u = 0^\circ$.

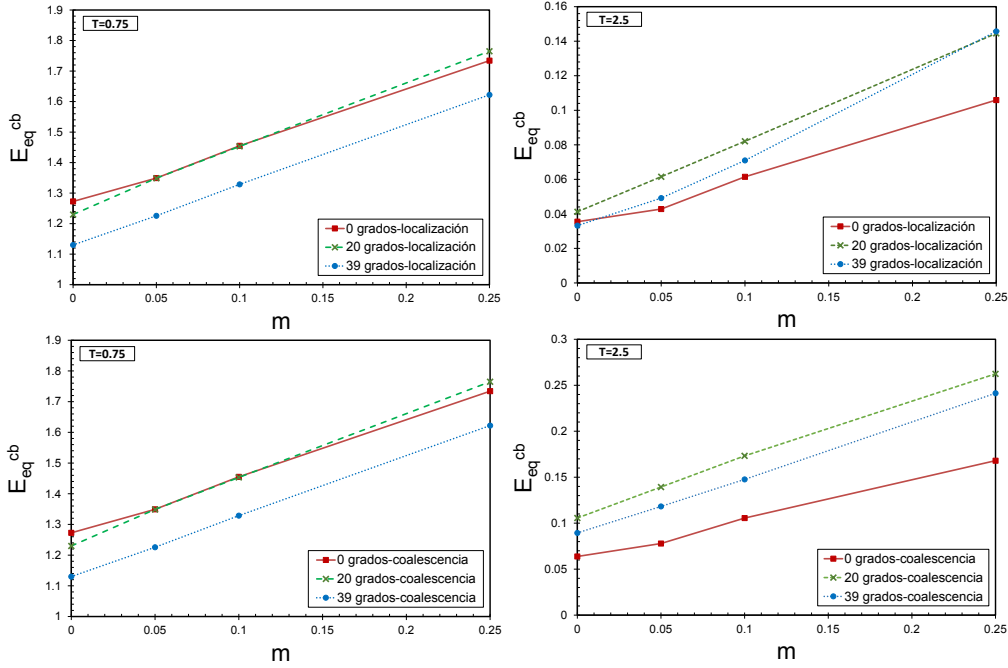


Fig. 6.13 Valores críticos de la deformación equivalente en la banda E_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia frente al exponente de endurecimiento m para $L = -1$, $f_0 = 0.001$ y diferentes valores de T y ψ_u

6.4.7 Influencia del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación

Con el objetivo de estudiar la influencia del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m en los fenómenos de localización y coalescencia, en la Figura 6.14 se muestra la evolución de la deformación equivalente normalizada en la banda \hat{E}_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y la coalescencia frente a los valores prescritos de triaxialidad en cada caso, para $m = 0.05$ y $m = 0.25$, y para tres orientaciones iniciales de la banda ($\psi_u = 0^\circ$, $\psi_u = 20^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$). La deformación se normaliza dividiendo su valor en cada triaxialidad y ángulo inicial, entre el correspondiente al exponente de endurecimiento $m = 0$, con la finalidad de tener una información más clara de la influencia de este parámetro en los fenómenos de localización y coalescencia.

En la primera gráfica de la Figura 6.14, se aprecia de una manera clara el efecto estabilizador introducido por el parámetro m , que retrasa la localización del material, especialmente en valores altos de la triaxialidad ($T > 1.5$). Cabe destacar que el valor normalizado de E_{eq}^{cb} tiene una relación no lineal con la triaxialidad, donde los valores obtenidos con $T = 2.5$ son $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 3.0$ para $m = 0.25$ y $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 1.2$ para $m = 0.05$. A su vez, para $\psi_u = 20^\circ$ se tiene también una relación no lineal con la triaxialidad, siendo los valores de deformación con $T = 2.5$, $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 3.5$ para $m = 0.25$ y $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 1.5$ para

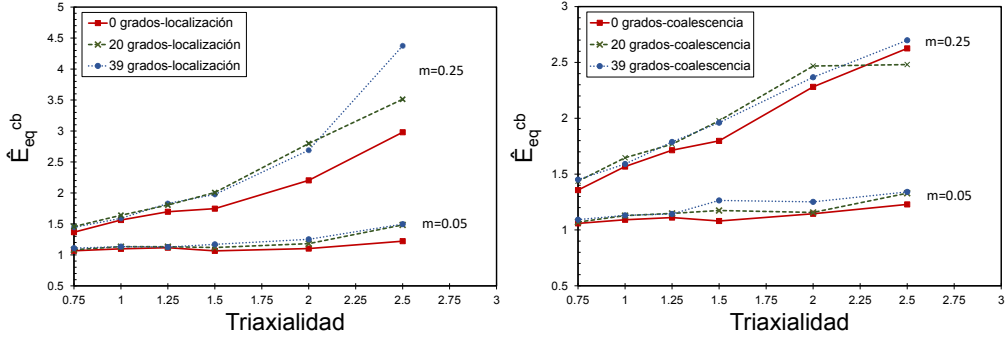


Fig. 6.14 Deformación equivalente crítica normalizada en la banda \hat{E}_{eq}^{cb} al comienzo de la localización y coalescencia frente a la triaxialidad T , para $m = 0.05$ y $m = 0.25$, y para $\psi_u = 0^\circ$, $\psi_u = 20^\circ$ y $\psi_u = 39^\circ$

$m = 0.05$. Lo mismo sucede para $\psi_u = 39^\circ$, con $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 4.4$ para $m = 0.25$ y $\hat{E}_{eq}^{cb} \approx 1.5$ para $m = 0.05$.

De la misma manera, si se analiza la segunda gráfica de la Figura 6.14 se puede observar que para el fenómeno de coalescencia se repite el efecto estabilizador producido por el parámetro de endurecimiento m , el cual crece cuando aumenta el valor de triaxialidad prescrito en cada caso. Sin embargo, el incremento de la deformación necesaria para que se produzca la coalescencia cuando se aumenta la triaxialidad no es tan acentuado como en el caso de la localización.

Para un mayor énfasis en el efecto estabilizador del parámetro de endurecimiento m , en la Figura 6.15 (a,b) se muestra la evolución del ratio entre las deformaciones equivalentes críticas de coalescencia y localización en la banda (E_{eq}^{cb}) en función de m para diferentes valores de triaxialidad y los ángulos de orientación iniciales de la banda $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 20^\circ$. Se puede observar que el ratio entre la deformación crítica de coalescencia y de localización se reduce considerablemente al aumentar el valor de m , donde con $\psi_u = 0^\circ$ y $T = 2.75$ el ratio entre las deformaciones críticas es $E_{eq(coal)}^{cb}/E_{eq(loc)}^{cb} \approx 2.8$ para $m = 0$ y $E_{eq(coal)}^{cb}/E_{eq(loc)}^{cb} \approx 1.8$ para $m = 0.25$. Este ratio aumenta cuando la orientación inicial de la banda crece, dentro de los valores estudiados, donde con $\psi_u = 20^\circ$ y $T = 2.75$ el ratio entre las deformaciones críticas es $E_{eq(coal)}^{cb}/E_{eq(loc)}^{cb} \approx 3.9$ para $m = 0$ y $E_{eq(coal)}^{cb}/E_{eq(loc)}^{cb} \approx 2.1$ para $m = 0.25$.

Asimismo, el valor de triaxialidad aplicado en la celda también juega un papel fundamental en el valor del ratio entre las deformaciones equivalentes críticas de coalescencia y localización. En la Figura 6.15 (c,d) se representa el mismo ratio entre las deformaciones críticas frente a la triaxialidad T para diferentes valores del exponente de endurecimiento m y los ángulos de orientación iniciales de la banda $\psi_u = 0^\circ$ y $\psi_u = 20^\circ$. Se puede ver en este caso que el ratio entre la deformación crítica de coalescencia y de localización aumenta considerablemente al incrementar el valor de T , donde con $\psi_u = 0^\circ$ y $m = 0$ el ratio entre las deformaciones críticas es $E_{eq(coal)}^{cb}/E_{eq(loc)}^{cb} \approx 3.5$ para $T = 3$ y

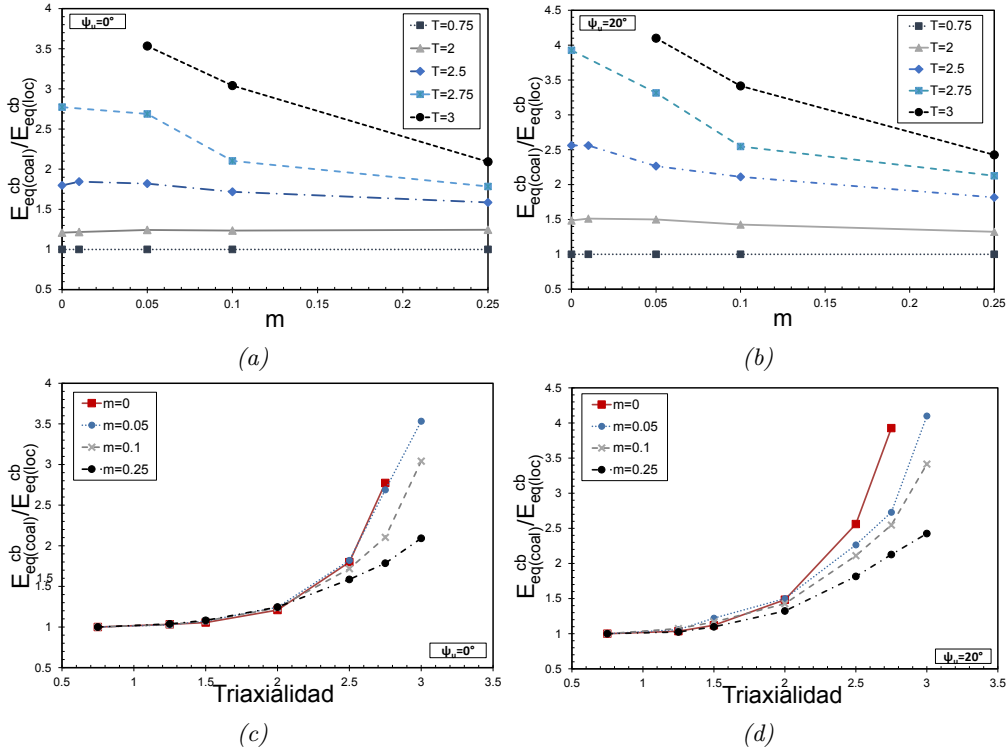


Fig. 6.15 Ratio entre las deformaciones equivalentes críticas de coalescencia y localización en la banda E_{eq}^{cb} , frente al exponente de endurecimiento m (a,b) y frente a la triaxialidad (c,d) para diferentes valores de T , m y ψ_u

$E_{eq}^{cb} / E_{eq}^{cb} = 1$ para $T = 0.75$. Además, al igual que en el caso anterior, este ratio aumenta cuando la orientación inicial crece, donde con $\psi_u = 20^\circ$ y $m = 0$ el ratio entre las deformaciones críticas es $E_{eq}^{cb} / E_{eq}^{cb} \approx 4.1$ para $T = 3$ y $E_{eq}^{cb} / E_{eq}^{cb} \approx 1$ para $T = 0.75$.

Por lo tanto, se puede afirmar que la separación entre los fenómenos de coalescencia y localización se ve reducida debido al efecto estabilizador del exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m . A su vez, esta separación se ve afectada por el valor de la triaxialidad del estado tensional aplicado, partiendo de una aparición simultánea de ambos fenómenos para valores bajos de triaxialidad ($T < 1$) y aumentando según se incrementa el valor de T .

6.5 Resumen y conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado una metodología numérica original, basada en simulaciones de modelos de celdas unitarias tridimensionales en un código comercial de elementos finitos, capaz de analizar la interacción que se produce entre la localización

macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales dúctiles con dependencia de la velocidad de deformación. El modelo propuesto se compone de una celda unitaria con forma de paralelepípedo con un hueco inicialmente esférico en su interior, que representa la parte de la banda, donde se tienen dos bloques externos a la misma que, en su conjunto, permiten captar el fenómeno de localización y de coalescencia, definiendo el ángulo de orientación inicial de la banda de localización y prescribiendo valores constantes de la triaxialidad y el parámetro de Lode aplicados en la celda.

Se ha realizado una extensa campaña de simulaciones numéricas de la celda en un código comercial de elementos finitos con el objetivo de analizar si la localización macroscópica se produce antes que la coalescencia de huecos o si los dos fenómenos se producen de manera simultánea en materiales viscoplásticos, además de estudiar el efecto que producen los diferentes parámetros del problema, como pueden ser el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación, la triaxialidad o el ángulo de orientación inicial de la banda de localización.

Los puntos clave de este estudio se pueden resumir de la siguiente manera:

- Se han logrado reproducir los resultados del trabajo de Tekoğlu et al. (2015) con una metodología diferente, donde se ha simplificado el método de implementación de los bloques externos a la banda de localización, basado en un algoritmo que utiliza conectores elásticos, mediante la introducción de unos bloques suficientemente largos de manera física en el modelo. Esta nueva metodología permite modificar la orientación inicial de la banda sin necesidad de complicar la geometría (y el mallado) con celdas inclinadas, además de prescindir de la formulación adicional que tiene en cuenta los bloques externos.
- Para el material dependiente de la velocidad de deformación analizado, se ha determinado que el fenómeno de localización siempre se produce antes que la coalescencia, excepto en valores de triaxialidad bajos ($T < 1$), donde ambos fenómenos aparecen de forma simultánea en el modelo. La transición entre ambos comportamientos se produce en $T \approx 1$.
- Se ha constatado el efecto estabilizador que produce el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m , donde a medida que incrementa su valor se necesita una mayor deformación equivalente en la celda completa (banda más bloques externos) para que aparezca el fenómeno de localización. Asimismo, se ha comprobado que al aumentar el valor de m , la diferencia entre las deformaciones de localización y coalescencia se reduce.
- Los diferentes parámetros del problema también afectan a los fenómenos de localización y coalescencia. El aumento de la triaxialidad provoca que la aparición del fenómeno de localización se produzca con menores valores de deformación equivalente en la celda y hace que crezca la diferencia entre las deformaciones

críticas de localización y coalescencia. Por otro lado, el aumento del ángulo de orientación inicial de la banda (dentro de los valores estudiados) también adelanta la aparición de la localización.

7

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presenta una breve recopilación de las principales conclusiones obtenidas de los trabajos realizados en el presente documento. Asimismo, se proponen diferentes líneas de trabajo futuro con el fin de continuar la investigación desarrollada en esta tesis doctoral.

7.1 Conclusiones

De acuerdo con los objetivos generales presentados en el Capítulo 1, se ha realizado un estudio del proceso de fractura en materiales dúctiles debido a la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos, analizando los factores que pueden influir en el proceso y mejorando los modelos constitutivos que reproducen este tipo de comportamiento.

En primer lugar, se ha desarrollado un modelo constitutivo para materiales dúctiles viscoplásticos con huecos cilíndricos en su interior, generando dos funciones de plastificación analíticas, primera y segunda aproximación, que tienen en cuenta su comportamiento en un material homogéneo, donde las conclusiones más relevantes de este trabajo son:

- En comparación con el modelo clásico de Gurson, las dos funciones de plastificación analíticas presentadas en esta tesis doctoral suponen una mejora muy evidente a la hora de predecir el comportamiento de materiales sensibles a la velocidad de deformación plástica.
- Ambas aproximaciones analíticas recuperan el resultado exacto del modelo de Gurson cuando el valor de m es igual a cero y utilizan constantes en la aproximación que son totalmente independientes del material.
- Por último, la segunda aproximación propuesta presenta una gran precisión en los resultados en comparación con otros modelos viscoplásticos, siendo de mayor facilidad en la implementación en códigos de elementos finitos y suponiendo menor coste computacional.

En segundo lugar, se ha desarrollado una extensión del modelo Gurson-Tvergaard (GT), para materiales sin dependencia con la la velocidad de deformación, que incluye el efecto del triaxialidad y del parámetro de Lode a través de los parámetros de ajuste del modelo, utilizando simulaciones numéricas de modelos de celda unitaria tridimensionales con huecos esféricos para su implementación y posterior validación. En este caso, las conclusiones más importantes son:

- Queda demostrado que el modelo GT no es capaz de reproducir correctamente el comportamiento de un material cuando se aplican estados tensionales con valores diferentes del parámetro de Lode en el material.
- Por lo tanto, el modelo propuesto es capaz de reproducir de manera más precisa el comportamiento dúctil del material analizado que en el caso de los modelos GT tradicionales y permite ampliar su aplicabilidad a cualquier estado tensional tridimensional.

Por último, se ha realizado un estudio de la interacción que se produce entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales viscoplásticos, dependiendo del estado tensional aplicado y del ángulo de orientación de la banda de cortadura, mediante una metodología original basada en el estudio de simulaciones numéricas en modelos de celda unitaria tridimensionales con huecos esféricos. Las conclusiones más relevantes de este trabajo son las siguientes:

- La metodología original desarrollada en este trabajo consigue reproducir de manera satisfactoria los resultados del trabajo de Tekoğlu et al. (2015), simplificando notablemente su implementación y permitiendo modificar la orientación inicial de la banda sin necesidad de complicar la geometría (y el mallado) con celdas inclinadas.
- El fenómeno de localización de la banda de cortadura siempre se produce antes que la coalescencia en el material empleado, excepto en valores de triaxialidad bajos ($T < 1$), donde ambos fenómenos aparecen de forma simultánea en el modelo. La transición entre ambos comportamientos se produce en $T \approx 1$.
- Se ha constatado el efecto estabilizador que produce el exponente de endurecimiento por velocidad de deformación m , donde a medida que incrementa su valor se necesita una mayor deformación equivalente en la celda completa (banda más bloques externos) para que aparezca en fenómeno de localización. Asimismo, se ha comprobado que al aumentar el valor de m , la diferencia entre las deformaciones de localización y coalescencia se reduce.
- Los diferentes parámetros del problema también afectan a los fenómenos de localización y coalescencia. El aumento de la triaxialidad provoca que la aparición del fenómeno de localización se produzca con menores valores de deformación equivalente en la celda y hace que crezca la diferencia entre las deformaciones

críticas de localización y coalescencia. Por otro lado, el aumento del ángulo de orientación inicial de la banda (dentro de los valores estudiados) también adelanta la aparición de la localización.

7.2 Trabajos futuros

A continuación, se presentan posibles líneas de investigación que se podrían abordar como continuación del trabajo desarrollado en esta tesis doctoral.

- Abordar el desarrollo de modelos constitutivos para materiales viscoplásticos con geometrías diferentes a la celda cilíndrica empleada en este trabajo, como pudiera ser una celda esférica con un hueco esférico en su interior.
- Utilizar leyes de comportamiento plástico del material que no solo tengan dependencia con la velocidad de deformación plástica equivalente, extendiendo las funciones de plastificación a leyes del material que también dependan de la temperatura y de la deformación plástica equivalente ($\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, \theta)$).
- Analizar la influencia del parámetro de Lode en el comportamiento de celdas tridimensionales con huecos esféricos sometidos a valores bajos de triaxialidad ($T < 1$), donde se tienen que tener en cuenta otros efectos como el cambio de forma del hueco y su rotación durante el proceso de carga.
- Ampliar el estudio de la interacción producida entre la localización macroscópica y la coalescencia de microvacíos en materiales viscoplásticos, para diferentes valores del parámetro de Lode, más orientaciones iniciales de la banda y diferentes porosidades iniciales.

7.3 Lista de publicaciones

El trabajo de investigación desarrollado en esta tesis doctoral ha dado lugar a diferentes publicaciones en revistas científicas indexadas en el *Journal Citation Report* (JCR):

- Vadillo, G., Reboul, J. y Fernández-Sáez, J. (2016). A modified Gurson model to account for the influence of the Lode parameter at high triaxialities. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 56: 31-44, doi:10.1016/j.euromechsol.2015.09.010.
- Reboul, J. y Vadillo, G. (2018). Homogenized Gurson-type behavior equations for strain rate sensitive materials. *Acta Mechanica*, doi:10.1007/s00707-018-2189-0.
- Reboul, J., Vadillo, G., Srivastava, A. y Osovski, S. (2018). On the interplay between macroscopic localization and void coalescence for strain rate sensitive materials. (En preparación).

Asimismo, el trabajo desarrollado ha dado lugar a contribuciones en congresos científicos nacionales e internacionales donde el autor ha participado como ponente:

- Reboul, J. y Vadillo, G. Extensión del modelo de Gurson para materiales con sensibilidad a la velocidad de deformación. *GEF 2016 - 33^o Encuentro del Grupo Español de Fractura*. Donostia-San Sebastián, España, marzo de 2016.
- Reboul, J. y Vadillo, G. Extended Gurson-type yield criteria for strain rate sensitive materials. *SOLMECH 2016 – 40th Solid Mechanics Conference*. Varsovia, Polonia, agosto-septiembre de 2016.

- Aravas, N. (1987). On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International Journal for numerical methods in engineering*, 24(7):1395–1416, DOI: 10.1002/nme.1620240713.
- Argon, A., Im, J., y Needleman, A. (1975a). Distribution of plastic strain and negative pressure in necked steel and copper bars. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 6(4):815–824, DOI: 10.1007/BF02672305.
- Argon, A., Im, J., y Safoglu, R. (1975b). Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 6(4):825–837, DOI: 10.1007/BF02672306.
- Babout, L., Maire, E., y Fougères, R. (2004). Damage initiation in model metallic materials: X-ray tomography and modelling. *Acta Materialia*, 52(8):2475–2487, DOI: 10.1016/j.actamat.2004.02.001.
- Bai, Y. y Wierzbicki, T. (2008). A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence. *International journal of plasticity*, 24(6):1071–1096, DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.09.004.
- Bäker, M., Rösler, J., y Siemers, C. (2002). A finite element model of high speed metal cutting with adiabatic shearing. *Computers & Structures*, 80(5-6):495–513, DOI: 10.1016/S0045-7949(02)00023-8.
- Baldwin, W. y Edelson, B. (1962). The effect of second phases on the mechanical properties of alloys. *ASM TRANS Q*, 55(1):230–250.
- Bao, Y. y Wierzbicki, T. (2004). On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(1):81–98, DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2004.02.006.
- Barsoum, I. y Faleskog, J. (2007). Rupture mechanisms in combined tension and shear—micromechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44(17):5481–5498, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.010.
- Barsoum, I. y Faleskog, J. (2011). Micromechanical analysis on the influence of the lode parameter on void growth and coalescence. *International Journal of Solids and Structures*, 48(6):925–938, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.11.028.
- Barsoum, I., Faleskog, J., y Pingle, S. (2011). The influence of the lode parameter on ductile failure strain in steel. *Procedia Engineering*, 10:69–75, DOI: 10.1016/j.proeng.2011.04.014.
- Becker, R. (2002). Ring fragmentation predictions using the gurson model with material stability conditions as failure criteria. *International Journal of Solids and Structures*, 39(13):3555–3580, DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00170-1.

- Benallal, A., Desmorat, R., y Fournage, M. (2014). An assessment of the role of the third stress invariant in the gurson approach for ductile fracture. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 47:400–414, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.02.009.
- Benzerga, A., Besson, J., y Pineau, A. (2004). Anisotropic ductile fracture: Part i: experiments. *Acta Materialia*, 52(15):4623–4638, DOI: 10.1016/j.actamat.2004.06.020.
- Benzerga, A. A. (2000). *Rupture ductile des tôles anisotropes. Simulation de la propagation longitudinale dans un tube pressurisé*. Tesis Doctoral, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- Benzerga, A. A. y Leblond, J.-B. (2010). Ductile fracture by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 44:169–305, DOI: 10.1016/S0065-2156(10)44003-X.
- Beremin, F. (1981). Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a508 steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 12(5):723–731, DOI: 10.1007/BF02648336.
- Bergstrom, J. S. (2015). *Mechanics of solid polymers: theory and computational modeling*. Elsevier Science Publishing Co Inc.
- Besson, J. (2010). Continuum models of ductile fracture: a review. *International Journal of Damage Mechanics*, 19(1):3–52, DOI: 10.1177/1056789509103482.
- Betegón, C., del Coz, J., y Peñuelas, I. (2006). Implicit integration procedure for viscoplastic gurson materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44):6146–6157, DOI: 10.1016/j.cma.2005.12.015.
- Børvik, T., Hopperstad, O., y Berstad, T. (2003). On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part ii. numerical study. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22(1):15–32, DOI: 10.1016/S0997-7538(02)00005-0.
- Bourcier, R., Koss, D., Smelser, R., y Richmond, O. (1986). The influence of porosity on the deformation and fracture of alloys. *Acta Metallurgica*, 34(12):2443–2453, DOI: 10.1016/0001-6160(86)90147-1.
- Bridgman, P. W. (1952). *Studies in large plastic flow and fracture*, volume 177. McGraw-Hill New York.
- Brocks, W., Sun, D.-Z., y Hömig, A. (1995). Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. *International Journal of Plasticity*, 11(8):971–989, DOI: 10.1016/S0749-6419(95)00039-9.
- Brünig, M., Chyra, O., Albrecht, D., Driemeier, L., y Alves, M. (2008). A ductile damage criterion at various stress triaxialities. *International Journal of Plasticity*, 24(10):1731–1755, DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.12.001.
- Cazacu, O. y Stewart, J. B. (2009). Analytic plastic potential for porous aggregates with matrix exhibiting tension–compression asymmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(2):325–341, DOI: 10.1016/j.jmps.2008.10.010.
- Chabanet, O., Steglich, D., Besson, J., Heitmann, V., Hellmann, D., y Brocks, W. (2003). Predicting crack growth resistance of aluminium sheets. *Computational Materials Science*, 26:1–12, DOI: 10.1016/S0927-0256(02)00386-5.
- Chen, B., Peng, X., Fan, J., y Chen, S. (2005). A constitutive description for casting aluminum alloy a104 based on the analysis of cylindrical and spherical void models. *International journal of plasticity*, 21(11):2232–2253, DOI: 10.1016/j.ijplas.2005.04.004.

- Chu, C. y Needleman, A. (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology(Transactions of the ASME)*, 102(3):249–256, DOI: 10.1115/1.3224807.
- Cottrell, A. (1959). Theoretical aspects of fracture. In *ICF0, Swampscott-MA (USA) 1959*.
- Danas, K., Idiart, M. I., y Ponte Castañeda, P. (2008). A homogenization-based constitutive model for isotropic viscoplastic porous media. *International Journal of Solids and Structures*, 45(11):3392–3409, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.02.007.
- Danas, K. y Ponte Castañeda, P. (2012). Influence of the lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49(11):1325–1342, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.02.006.
- de Souza Neto, E. A., Peric, D., y Owen, D. R. (2011). *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons.
- Druyvesteyn, M., Klosterman, F., Roos, J., Van Dijk, P., Los, P., y Radelaar, S. (1964). Deformation bands in hard rolled copper foils. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 12(4):219–230, DOI: 10.1016/0022-5096(64)90021-3.
- Eberle, A., Klingbeil, D., y Schicker, J. (2000). The calculation of dynamic jr-curves from the finite element analysis of a charpy test using a rate-dependent damage model. *Nuclear Engineering and Design*, 198(1-2):75–87, DOI: 10.1016/S0029-5493(99)00281-2.
- Fabregue, D. y Pardoen, T. (2008). A constitutive model for elastoplastic solids containing primary and secondary voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(3):719–741, DOI: 10.1016/j.jmps.2007.07.008.
- Faleskog, J., Gao, X., y Shih, C. F. (1998). Cell model for nonlinear fracture analysis—i. micromechanics calibration. *International Journal of Fracture*, 89(4):355–373, DOI: 10.1023/A:1007421420901.
- Faleskog, J. y Shih, C. F. (1997). Micromechanics of coalescence—i. synergistic effects of elasticity, plastic yielding and multi-size-scale voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(1):2127–2550, DOI: 10.1016/S0022-5096(96)00078-6.
- Fritzen, F., Forest, S., Böhlke, T., Kondo, D., y Kanit, T. (2012). Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, 29:102–119, DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.08.005.
- Gao, X., Faleskog, J., Shih, C. F., y Dodds, R. (1998). Ductile tearing in part-through cracks: experiments and cell-model predictions. *Engineering Fracture Mechanics*, 59(6):761–777, DOI: 10.1016/S0013-7944(97)00174-4.
- Gao, X. y Kim, J. (2006). Modeling of ductile fracture: significance of void coalescence. *International Journal of Solids and Structures*, 43(20):6277–6293, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.08.008.
- Gao, X., Wang, T., y Kim, J. (2005). On ductile fracture initiation toughness: effects of void volume fraction, void shape and void distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 42(18):5097–5117, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.02.028.
- Gărăjeu, M., Michel, J., y Suquet, P. (2000). A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3):223–246, DOI: 10.1016/S0045-7825(99)00220-0.

- Garrison Jr, W. y Moody, N. (1987). Ductile fracture. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 48(11):1035–1074, DOI: 10.1016/0022-3697(87)90118-1.
- Ghosh, A. (1977). Tensile instability and necking in materials with strain hardening and strain-rate hardening. *Acta Metallurgica*, 25(12):1413–1424, DOI: 10.1016/0001-6160(77)90072-4.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., y Devaux, J. (1993). Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(11):1723–1754, DOI: 10.1016/0022-5096(93)90029-F.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., y Devaux, J. (1994). Approximate models for ductile metals containing nonspherical voids—case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116(3):290–297, DOI: 10.1115/1.2904290.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., y Devaux, J. (2001a). Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. ii. coalescence “in columns”. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32):5595–5604, DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00355-3.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G., y Devaux, J. (2001b). Theoretical models for void coalescence in porous ductile solids. i. coalescence “in layers”. *International journal of solids and structures*, 38(32):5581–5594, DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00354-1.
- Goods, S. y Brown, L. (1979). Overview no. 1: The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta Metallurgica*, 27(1):1–15, DOI: 10.1016/0001-6160(79)90051-8.
- Gurson, A. L. et al. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology*, 99(1):2–15, DOI: 10.1115/1.3443401.
- Hancock, J. y Mackenzie, A. (1976). On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24(2-3):147–160, DOI: 10.1016/0022-5096(76)90024-7.
- Hao, S. y Brocks, W. (1997). The gurson-tvergaard-needleman-model for rate and temperature-dependent materials with isotropic and kinematic hardening. *Comput. Mech.*, 20(1-2):34–40, DOI: 10.1007/s004660050213.
- Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2):79–95, DOI: 10.1016/0022-5096(67)90018-X.
- Holzappel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics*, volume 24. Wiley John + Sons.
- Idiart, M. I. (2008). The macroscopic behavior of power-law and ideally plastic materials with elliptical distribution of porosity. *Mechanics Research Communications*, 35(8):583–588, DOI: 10.1016/j.mechrescom.2008.06.002.
- Jackiewicz, J. (2011). Use of a modified gurson model approach for the simulation of ductile fracture by growth and coalescence of microvoids under low, medium and high stress triaxiality loadings. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(3):487–502, DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.027.
- Keralavarma, S., Hoelscher, S., y Benzerga, A. (2011). Void growth and coalescence in anisotropic plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 48(11):1696–1710, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.02.020.

- Kim, J., Gao, X., y Srivatsan, T. (2003). Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40(26):7357 – 7374, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.08.022.
- Kim, J., Gao, X., y Srivatsan, T. S. (2004). Modeling of void growth in ductile solids: effects of stress triaxiality and initial porosity. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(3):379–400, DOI: 10.1016/S0013-7944(03)00114-0.
- Kim, J., Zhang, G., y Gao, X. (2007). Modeling of ductile fracture: application of the mechanism-based concepts. *International journal of solids and structures*, 44(6):1844–1862, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.08.028.
- Klöcker, H. y Tvergaard, V. (2003). Growth and coalescence of non-spherical voids in metals deformed at elevated temperature. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(8):1283–1308, DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2003.09.018.
- Koplik, J. y Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24(8):835–853, DOI: 10.1016/0020-7683(88)90051-0.
- Koppenhoefer, K. C. y Dodds, R. H. (1998). Ductile crack growth in pre-cracked cvn specimens: numerical studies. *Nuclear Engineering and Design*, 180(3):221–241, DOI: 10.1016/S0029-5493(97)00218-5.
- Le Roy, G., Embury, J., Edwards, G., y Ashby, M. (1981). A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Acta Metallurgica*, 29(8):1509–1522, DOI: 10.1016/0001-6160(81)90185-1.
- Leblond, J., Perrin, G., y Devaux, J. (1994a). Bifurcation effects in ductile metals with non-local damage. *Journal of Applied Mechanics*, 61(2):236–242, DOI: 10.1115/1.2901435.
- Leblond, J., Perrin, G., y Suquet, P. (1994b). Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity*, 10(3):213–235, DOI: 10.1016/0749-6419(94)90001-9.
- Leblond, J.-B., Perrin, G., y Devaux, J. (1995). An improved gurson-type model for hardenable ductile metals. *European journal of mechanics. A. Solids*, 14(4):499–527.
- Lecarme, L., Tekog, C., Pardoën, T., et al. (2011). Void growth and coalescence in ductile solids with stage iii and stage iv strain hardening. *International Journal of Plasticity*, 27(8):1203–1223, DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.01.004.
- Lloyd, D. (1991). Aspects of fracture in particulate reinforced metal matrix composites. *Acta metallurgica et materialia*, 39(1):59–71, DOI: 10.1016/0956-7151(91)90328-X.
- Madou, K. y Leblond, J.-B. (2012a). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—i: limit-analysis of some representative cell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5):1020–1036, DOI: 10.1016/j.jmps.2011.11.008.
- Madou, K. y Leblond, J.-B. (2012b). A gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids—ii: determination of yield criterion parameters. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(5):1037–1058, DOI: 10.1016/j.jmps.2012.01.010.
- Marciniak, Z. y Kuczyński, K. (1967). Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *International Journal of Mechanical Sciences*, 9(9):609 – 620, DOI: 10.1016/0020-7403(67)90066-5.

- McClintock, F. (1968). A criterion of ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35:363–371, DOI: 10.1115/1.3601204.
- Molinari, A., Musquar, C., y Sutter, G. (2002). Adiabatic shear banding in high speed machining of ti-6al-4v: experiments and modeling. *International journal of Plasticity*, 18(4):443–459, DOI: 10.1016/S0749-6419(01)00003-1.
- Nahshon, K. y Hutchinson, J. (2008). Modification of the gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(1):1–17, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2007.08.002.
- Needleman, A. (1972). A numerical study of necking in circular cylindrical bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(2):111–127, DOI: 10.1016/0022-5096(72)90035-X.
- Needleman, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of applied mechanics*, 54(3):525–531, DOI: 10.1115/1.3173064.
- Needleman, A., Nutt, S. R., Suresh, S., y Tvergaard, V. (1993). Matrix, reinforcement, and interfacial failure. *Fundamentals of metal-matrix composites*(A 95-25875 06-24), Stoneham, MA, Butterworth-Heinemann, 1993,, pages 233–250, DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.06.001.
- Needleman, A. y Tvergaard, V. (1991). A numerical study of void distribution effects on dynamic, ductile crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 38(2-3):157–173, DOI: 10.1016/0013-7944(91)90079-G.
- Olivella, X. O. y de Saracibar Bosch, C. A. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, volume 92. Univ. Politèc. de Catalunya.
- Pan, J., Saje, M., y Needleman, A. (1983). Localization of deformation in rate sensitive porous plastic solids. *International Journal of Fracture*, 21(4):261–278, DOI: 10.1007/BF00942345.
- Pardoën, T. y Hutchinson, J. (2000). An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12):2467–2512, DOI: 10.1016/S0022-5096(00)00019-3.
- Peirce, D., Shih, C. F., y Needleman, A. (1984). A tangent modulus method for rate dependent solids. *Computers & Structures*, 18(5):875–887, DOI: 10.1016/0045-7949(84)90033-6.
- Peñuelas Sánchez, I. (2005). *Influencia de la constricción en el comportamiento a fractura de uniones soldadas*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo.
- Pietryga, M. P., Vladimirov, I. N., y Reese, S. (2012). A finite deformation model for evolving flow anisotropy with distortional hardening including experimental validation. *Mechanics of Materials*, 44:163–173, DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.07.014.
- Plesek, J., Feigenbaum, H. P., y Dafalias, Y. F. (2009). Convexity of yield surface with directional distortional hardening rules. *Journal of Engineering Mechanics*, 136(4):477–484, DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000077.
- Ponte Castañeda, P. (1991). The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1):45–71, DOI: 10.1016/0022-5096(91)90030-R.

- Ponte Castañeda, P. y Zaidman, M. (1994). Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9):1459–1497, DOI: 10.1016/0022-5096(94)90005-1.
- Puttick, K. (1959). Ductile fracture in metals. *Philosophical Magazine*, 4:964–969, DOI: 10.1080/14786435908238272.
- Ramaswamy, S. y Aravas, N. (1998a). Finite element implementation of gradient plasticity models part i: Gradient-dependent yield functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):11–32, DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00028-0.
- Ramaswamy, S. y Aravas, N. (1998b). Finite element implementation of gradient plasticity models part ii: Gradient-dependent evolution equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):33–53, DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00027-9.
- Reboul, J. y Vadillo, G. (2018). Homogenized gurson-type behavior equations for strain rate sensitive materials. *Acta Mechanica*, DOI: 10.1007/s00707-018-2189-0.
- Reusch, F., Svendsen, B., y Klingbeil, D. (2003). A non-local extension of gurson-based ductile damage modeling. *Computational Materials Science*, 26:219–229, DOI: 10.1016/S0927-0256(02)00402-0.
- Reyes, A., Langseth, M., y Hopperstad, O. (2002). Crashworthiness of aluminum extrusions subjected to oblique loading: experiments and numerical analyses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(9):1965–1984, DOI: 10.1016/S0020-7403(02)00050-4.
- Rice, J. R. (1976). The localization of plastic deformation. In *W.T. Koiter (Ed.), Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220. North-Holland Publishing Company.
- Rice, J. R. y Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargements of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:201–217, DOI: 10.1016/0022-5096(69)90033-7.
- Rogers, H. (1960). The tensile fracture of ductile materials. *Transactions of the ASME*, pages 498–506.
- Rojek, J., Zienkiewicz, O., Onate, E., y Postek, E. (2001). Advances in fe explicit formulation for simulation of metalforming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 119(1-3):41–47, DOI: 10.1016/S0924-0136(01)00894-9.
- Rosenfield, A. y Hahn, G. (1966). Numerical descriptions of the ambient low-temperature, and high-strain rate flow and fracture behavior of plain carbon steel. *ASM Trans Quart*, 59(4):962–980.
- Scheyvaerts, F., Onck, P., Tekoglu, C., y Pardoën, T. (2011). The growth and coalescence of ellipsoidal voids in plane strain under combined shear and tension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(2):373–397, DOI: 10.1016/j.jmps.2010.10.003.
- Shabrov, M., Briant, C., Needleman, A., Kim, S., Sylven, E., Sherman, D., y Chuzhoy, L. (2004). Void nucleation by inclusion cracking. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 35(6):1745–1755, DOI: 10.1007/s11661-004-0083-y.
- Shockey, D., Seaman, L., Dao, K., y Curan, D. (1978). A computational fracture model for sa533, grade b, class i steel based upon microfracture process. *EPRI Ductile Fracture Research Review Document, EPRI NP-701-SR*.

- Simo, J. C. y Taylor, R. L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 48(1):101–118, DOI: 10.1016/0045-7825(85)90070-2.
- Simulia (2014). *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.14 Edition*. Dassault Systemes, Providence, USA.
- Srikanth, A. y Zabarar, N. (1999). A computational model for the finite element analysis of thermoplasticity coupled with ductile damage at finite strains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:1569–1605.
- Srivastava, A. y Needleman, A. (2012). Porosity evolution in a creeping single crystal. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 20(3):035010, DOI: 10.1088/0965-0393/20/3/035010.
- Steglich, D. y Brocks, W. (1997). Micromechanical modelling of the behaviour of ductile materials including particles. *Computational Materials Science*, 9(1-2):7–17, DOI: 10.1016/S0927-0256(97)00053-0.
- Stewart, J. B. y Cazacu, O. (2011). Analytical yield criterion for an anisotropic material containing spherical voids and exhibiting tension-compression asymmetry. *International Journal of Solids and Structures*, 48(2):357–373, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.10.009.
- Stone, R. V., Cox, T., Low, J., y Psioda, J. (1985). Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture. *International Metals Reviews*, 30(1):157–180, DOI: 10.1179/imtr.1985.30.1.157.
- Tekoğlu, C., Hutchinson, J., y Pardoën, T. (2015). On localization and void coalescence as a precursor to ductile fracture. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 373(2038):20140121, DOI: 10.1098/rsta.2014.0121.
- Thomason, P. F. (1990). *Ductile Fracture of metals*. Pergamon Press, Oxford.
- Tipper, C. (1949). The fracture of metals. *Metallurgia*, 39:133–137.
- Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17:389–407, DOI: 10.1007/BF00036191.
- Tvergaard, V. (1982). On localization in ductile materials containing spherical voids. *International Journal of Fracture*, 18(4):237–252, DOI: 10.1007/BF00015686.
- Tvergaard, V. (2009). Behaviour of voids in a shear field. *International Journal of Fracture*, 158(1):41–49, DOI: 10.1007/s10704-009-9364-1.
- Tvergaard, V. y Needleman, A. (1984). Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32:157–169, DOI: 10.1016/0001-6160(84)90213-X.
- Tvergaard, V. y Needleman, A. (1986). Effect of material rate sensitivity on failure modes in the charpy v-notch test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(3):213–241, DOI: 10.1016/0022-5096(86)90019-0.
- Tvergaard, V. y Needleman, A. (1995). Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 32(8-9):1063–1077, DOI: 10.1016/0020-7683(94)00185-Y.
- Tvergaard, V. y Needleman, A. (2000). Analysis of the charpy v-notch test for welds. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(6):627–643, DOI: 10.1016/S0013-7944(99)00146-0.

- Vadillo, G. (2007). *Modelos de fractura dúctil en condiciones estáticas y dinámicas*. Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid.
- Vadillo, G. y Fernández-Sáez, J. (2009). An analysis of gurson model with parameters dependent on triaxiality based on unitary cells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(3):417–427, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.10.005.
- Vadillo, G., Reboul, J., y Fernández-Sáez, J. (2016). A modified gurson model to account for the influence of the lode parameter at high triaxialities. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 56:31–44, DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.09.010.
- Wen, J., Huang, Y., Hwang, K., Liu, C., y Li, M. (2005). The modified gurson model accounting for the void size effect. *International Journal of Plasticity*, 21(2):381–395, DOI: 10.1016/j.ijplas.2004.01.004.
- Willis, J. (1992). On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites: correction and addition. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(2):441–445, DOI: 10.1016/S0022-5096(05)80020-1.
- Worswick, M. y Pelletier, P. (1998). Numerical simulation of ductile fracture during high strain rate deformation. *The European Physical Journal-Applied Physics*, 4(3):257–267, DOI: 10.1051/epjap:1998269.
- Worswick, M. y Pick, R. (1995). Void growth and coalescence during high velocity impact. *Mechanics of Materials*, 19(4):293–309, DOI: 10.1016/0167-6636(94)00041-E.
- Xue, L. (2007). Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading. *International journal of solids and structures*, 44(16):5163–5181, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.12.026.
- Xue, L. (2008). Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(11):3343–3366, DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.07.022.
- Zhang, K., Bai, J., y Francois, D. (2001). Numerical analysis of the influence of the lode parameter on void growth. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32):5847–5856, DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00391-7.
- Zhang, Z. (1995). On the accuracies of numerical integration algorithms for gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121(1-4):15–28, DOI: 10.1016/0045-7825(94)00706-S.
- Zhang, Z. (2001). A complete gurson model. *Non Linear Fracture and Damage Mechanics*, pages 223–248.
- Zhang, Z., Thaulow, C., y Odegard, J. (2000). A complete gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2):155–168, DOI: 10.1016/S0013-7944(00)00055-2.

A

Demostración de la relación $\dot{E}_{eq} = \dot{\bar{\epsilon}}$ con porosidad igual a cero

Las superficies de plastificación obtenidas para coeficientes de endurecimiento por velocidad de deformación $m \neq 0$, cumplen que $\Sigma_{eq} = \bar{\sigma}$ cuando la porosidad f es nula, recuperando el criterio de Von Mises. Esto es debido a que $\sigma_0 \dot{E}_{eq}^m$ es igual, en este caso, al límite elástico del material $\bar{\sigma} = \sigma_0 \dot{\bar{\epsilon}}^m$.

La igualdad entre la velocidad de deformación macroscópica equivalente y la velocidad de deformación plástica equivalente ($\dot{E}_{eq} = \dot{\bar{\epsilon}}$) para el caso en el que la porosidad f sea nula, se puede demostrar retomando la ecuación (4.43). Dicha expresión se corresponde con la primera derivada respecto al tiempo de la definición del volumen del hueco Ω y, teniendo en cuenta que $f = 0$, implica que $a = 0$. Por lo tanto,

$$\pi \dot{H}(b^2 - a^2) + \pi H(2b\dot{b} - 2a\dot{a}) = \pi \dot{H}b^2 + \pi H2b\dot{b} = 0,$$

donde se puede despejar \dot{E}_3 ,

$$\frac{\dot{H}}{H} + 2\frac{\dot{b}}{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_3 = -2\dot{\epsilon}_r|_b. \quad (\text{A.1})$$

Por otra parte, utilizando la definición de la velocidad de deformación en la dirección acimutal (4.12) y sabiendo que $A = 0$ cuando $a = 0$ se obtiene que

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\dot{E}_3}{2} + \frac{A}{r^2} = -\frac{\dot{E}_3}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Además, teniendo también en cuenta la definición de la velocidad de deformación en el eje z ($\dot{\epsilon}_z = \dot{E}_3$), se puede obtener la velocidad de deformación plástica equivalente ($\dot{\bar{\epsilon}}$),

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2)} = \dot{E}_3. \quad (\text{A.3})$$

Demostración de la relación $\dot{E}_{eq} = \dot{\varepsilon}$ con porosidad igual a cero

Ahora, con el objetivo de establecer una relación entre las velocidades de deformación macroscópicas equivalente (\dot{E}_{eq}) y longitudinal (\dot{E}_3) se retoma la ecuación (A.1), sabiendo que la deformación en dirección radial en la superficie exterior del cilindro coincide con la deformación macroscópica en el eje 1.

$$\dot{E}_3 = -2 \dot{\varepsilon}_r|_b = -2\dot{E}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_1 = -\frac{\dot{E}_3}{2} \quad (\text{A.4})$$

Entonces, utilizando la definición de la velocidad de deformación equivalente macroscópica para un caso axisimétrico se tiene que

$$\dot{E}_{eq} = \frac{2}{3} |\dot{E}_3 - \dot{E}_1| = \frac{2}{3} \left| \dot{E}_3 + \frac{\dot{E}_3}{2} \right| = \dot{E}_3. \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, mediante las ecuaciones (A.3) y (A.5) se puede afirmar que $\dot{E}_{eq} = \dot{E}_3 = \dot{\varepsilon}$ en el caso en el que la porosidad f sea nula.

B

Operador tangente consistente para un modelo GT dependiente del parámetro de Lode Ecuaciones complementarias

- Derivando las ecuaciones (5.57), $\partial\Sigma_h$ y Σ_{eq} tiene la forma

$$\begin{aligned}\partial\Sigma_h &= \partial\Sigma_h^{trial} - K\partial\Delta\varepsilon_p, \\ \partial\Sigma_{eq} &= A_{11}\partial\Sigma_{eq}^{trial} + A_{12}\partial\Delta\varepsilon_q + A_{13}\partial\Delta\varepsilon_\Omega + A_{14}\partial\Omega,\end{aligned}\quad (B.1)$$

donde los coeficientes A_{ij} son conocidos y $\partial\Delta\varepsilon_p$, $\partial\Delta\varepsilon_q$ y $\partial\Delta\varepsilon_\Omega$ se obtienen de las cinco ecuaciones constitutivas implícitas dadas en (5.56) y de las relaciones de (B.1).

$$\begin{aligned}\partial\Delta\varepsilon_p &= B_{11}\partial\Sigma_h^{trial} + B_{12}\partial\Sigma_{eq}^{trial} + B_{13}\partial\Omega, \\ \partial\Delta\varepsilon_q &= B_{21}\partial\Sigma_h^{trial} + B_{22}\partial\Sigma_{eq}^{trial} + B_{23}\partial\Omega, \\ \partial\Delta\varepsilon_\Omega &= B_{31}\partial\Sigma_h^{trial} + B_{32}\partial\Sigma_{eq}^{trial} + B_{33}\partial\Omega, \quad \text{con } B_{ij} \text{ conocidos.}\end{aligned}\quad (B.2)$$

- Derivando la tercera relación de la ecuación (5.57) se obtiene

$$\begin{aligned}& 3(\Omega + 1)X^2\partial X + X^3\partial\Omega + \left(2(\Omega + 1)^2 - 1\right)\frac{(Y\Sigma_{eq})^2}{9}\partial(Y\Sigma_{eq}) \\ & + 4\frac{(Y\Sigma_{eq})^3}{27}(\Omega + 1)\partial\Omega + 2X(Y\Sigma_{eq}) + X^2\partial(Y\Sigma_{eq}) + \frac{(Y\Sigma_{eq})^2}{3}(\Omega + 1)\partial X \\ & + \frac{2X(\Omega + 1)}{3}(Y\Sigma_{eq})\partial(Y\Sigma_{eq}) + \frac{X(Y\Sigma_{eq})^2}{3}\partial\Omega = \frac{27}{2\Sigma_{eq}^3}\partial J_3^{trial} - \frac{81J_3^{trial}}{2\Sigma_{eq}^4}\partial\Sigma_{eq},\end{aligned}\quad (B.3)$$

siendo ∂X y $\partial(Y_{\Sigma_{eq}})$ las derivadas de X y $Y_{\Sigma_{eq}}$ de la ecuación (5.54),

$$\begin{aligned}\partial X &= 3G \frac{\partial \Delta \varepsilon_q}{\Sigma_{eq}} - \frac{9G(\Omega + 1)}{\Sigma_{eq}^2} \partial \Delta \varepsilon_\Omega - \frac{9G \Delta \varepsilon_\Omega}{\Sigma_{eq}^2} \partial \Omega \\ &\quad + \left(\frac{18G(\Omega + 1) \Delta \varepsilon_\Omega}{\Sigma_{eq}^3} - 3G \frac{\Delta \varepsilon_q}{\Sigma_{eq}^2} \right) \partial \Sigma_{eq}, \\ \partial(Y_{\Sigma_{eq}}) &= \frac{-54G \Delta \varepsilon_\Omega}{\Sigma_{eq}^3} \partial \Sigma_{eq} + \frac{27G}{\Sigma_{eq}^2} \partial \Delta \varepsilon_\Omega.\end{aligned}\tag{B.4}$$

$\partial \Omega$ se puede obtener, operando con las ecuaciones (B.1), (B.3) y (B.4), como

$$\partial \Omega = B_{41} \partial \Delta \varepsilon_q + B_{42} \partial \Delta \varepsilon_\Omega + B_{43} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + B_{44} \partial J_3^{trial}\tag{B.5}$$

o de una forma similar, considerando la relación dada en las ecuaciones (B.2),

$$\partial \Omega = \tilde{B}_{41} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{B}_{42} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{B}_{43} \partial J_3^{trial},\tag{B.6}$$

lo que permite que $\partial \Delta \varepsilon_p$, $\partial \Delta \varepsilon_q$ y $\partial \Delta \varepsilon_\Omega$ sean escritos como

$$\begin{aligned}\partial \Delta \varepsilon_p &= \tilde{B}_{11} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{B}_{12} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{B}_{13} \partial J_3^{trial}, \\ \partial \Delta \varepsilon_q &= \tilde{B}_{21} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{B}_{22} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{B}_{23} \partial J_3^{trial}, \\ \partial \Delta \varepsilon_\Omega &= \tilde{B}_{31} \partial \Sigma_h^{trial} + \tilde{B}_{32} \partial \Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{B}_{33} \partial J_3^{trial}, \quad \text{con } \tilde{B}_{ij} \text{ conocidos.}\end{aligned}\tag{B.7}$$

- Derivando la ecuación (5.50),

$$\begin{aligned}(2X \partial X - Y \partial Z - Z \partial Y) \text{cof}(\Sigma') + (X^2 - YZ) \partial(\text{cof} \Sigma') &= \partial(\text{cof} \Sigma'^{trial}) \\ - (2Z \partial X + 2X \partial Z + 2Y J_3 \partial Y + Y^2 \partial J_3) \Sigma' &- (2XZ + Y^2 J_3) \partial \Sigma' \\ + (Y J_3 \partial X + X J_3 \partial Y + XY \partial J_3 + 4Z \partial Z) \mathbf{1},\end{aligned}\tag{B.8}$$

con ∂X dado en la ecuación (B.4), y ∂Y y ∂Z , con la forma

$$\partial Y = \frac{27G}{\Sigma_{eq}^3} \partial \Delta \varepsilon_\Omega - \frac{81G}{\Sigma_{eq}^4} \partial \Sigma_{eq}, \quad \partial Z = \frac{\Sigma_{eq}^2}{9} \partial Y + \frac{2Y \Sigma_{eq}}{9} \partial \Sigma_{eq},\tag{B.9}$$

y ∂J_3 como

$$\partial J_3 = \frac{6 \Sigma_{eq}^2 (\Omega + 1)}{27} \partial \Sigma_{eq} + \frac{2 \Sigma_{eq}^3}{27} \partial \Omega,\tag{B.10}$$

es posible obtener

$$\partial(\text{cof} \Sigma') = \tilde{C}_1 \partial(\text{cof} \Sigma'^{trial}) + \tilde{C}_2 \partial \Sigma' + \tilde{D}_1 \Sigma' + \tilde{D}_2 \text{cof}(\Sigma') + \tilde{D}_3 \mathbf{1}.\tag{B.11}$$

\tilde{D}_1 , \tilde{D}_2 y \tilde{D}_3 tienen la forma $\tilde{D}_i = \tilde{D}_{i1}\partial\Sigma_h^{trial} + \tilde{D}_{i2}\partial\Sigma_{eq}^{trial} + \tilde{D}_{i3}\partial J_3^{trial}$, con \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 y todos los coeficientes \tilde{D}_{ij} conocidos.

